**3. Замена переменной**

 Метод основан на замене переменной и тождества |a|2=a2 [11].

**Пример 9**. Решить уравнение 2(x-3)2-5∙|x-3|+2=0.

2|x-3|2-5|x-3|+2=0

Сделав замену переменной t=|x-3| (t$\geq 0)$, получим квадратное уравнение

2t2-5t+2=0

t1=2, t2=0,5, откуда |x-3|=2 или |x-3|=0,5, и, значит, х1=5; х2=1; х3=2,5; х4=3,5.

Ответ: 1; 2,5; 3,5; 5.

**4. Использование геометрического смысла модуля**

при решении уравнения вида ***|x-a|+|x-b|=c*** (3)

Решить уравнения - значит найти все точки ***х*** числовой прямой, сумма расстояний от каждой из которых до точек *а* и *b* равна *с.*

Если расстояние между точками *a* и *b* больше *с* *(|a-b|>c*), то уравнение (3) не имеет решений. Действительно, если предположить, что искомая точка принадлежит отрезку с концами *a* и *b*, то сумма расстояний от такой точки до концов отрезка окажется больше *с* (поскольку длина этого отрезка больше *с*), а для любой точки, лежащей вне рассматриваемого отрезка, сумма расстояний будет еще больше.

Если расстояние между точками *a* и *b* равно *c* *(|a-b|=c*), то любая точка отрезка с концами *a* и *b* будет решением уравнения (3).

Если расстояние между точками *a* и *b* меньше *с* (|*a-b|<c*), то для любой точки отрезка с концами *a* и *b* сумма расстояний до точек *a* и *b* будет меньше *с*. Таким образом, искомая точка должна лежать вне отрезка с концами *a* и *b*. В этом случае сумма расстояний от искомой точки до точек *а* и *b* будет складываться из длины отрезка с концами *а* и *b* и удвоенного расстояния от этой точки до ближайшего к ней конца отрезка.

Данные рассуждения позволяют найти искомые значения переменной. Для этого нужно изобразить числовую ось, отметить на ней «ключевые» точки *a* и *b* и расстояние между ними *(|a-b*|) [11].

**Пример 10**. Решить уравнение |x-5|+|x+4|=12.

Запишем его как |x-5| + |x-(-4)|=12, где х+4=0 при x=-4, x-5=0 при x=5. Найдем все точки х на числовой оси, сумма расстояний от каждой из которых до точек 5 и -4 равна 12. На отрезке [-4;5] искомых точек быть не может, поскольку сумма расстояний от любой точки отрезка до его концов равна длине отрезка |5-(-4)|=9. Значит, искомые точки лежат вне отрезка [-4;5]. Рассмотри точку правее числа 5. Сумма расстояний от этой точки до концов отрезка складывается из длины отрезка и удвоенного расстояния от этой точки до точки 5. Удвоенное расстояние равно 12 -9=3, искомая точка находится правее точки 5 на 3:2=1,5 единиц. Первая искомая точка: х=6,5. Аналогично, находим вторую искомую точку левее точки -4 на 1,5 единиц: х=-5,5.



Ответ: -5,5; 6,5

**Пример 11**. Решить уравнение $\sqrt{(x-2)^{2}}+\sqrt{(x-3)^{2}}=1$ $⇔$

|x-2| +|x-3|=1 (свойство 11)

 Получаем уравнение вида (3).

Используем геометрический смысл модуля: найти точку *Х* такую, что сумма расстояний от *Х* до точки с координатой 2 и 3 равна 1. Любая точка внутри отрезка [2;3] удовлетворяет данному условию, так как расстояние между точками 2 и 3 равно 1.

Ответ: [2;3]

**§3. Методы решения неравенств, содержащих модуль**

При решении неравенств вида **|f1(x)|+|f2(x)| +….+|fn(x)| ⋁ g(x)** применяется метод промежутков (интервалов).

**Пример 12**. Решить неравенство |x+1|-|x-4|>7.

Корни подмодульных выражений равны -1 и 4.

По методу промежутков рассмотрим 3 случая:

1) $\left\{\begin{array}{c}x\geq 4,\\x+1-x+1>7;\end{array}\right.$ $⇔ \left\{\begin{array}{c}x\geq 4,\\0∙x>5;\end{array}\right.$ $⟺x\in ∅.$

2) $\left\{\begin{array}{c}-1\leq x\leq 4,\\x+1+x-4>7;\end{array}\right.$ $⇔$ $\left\{\begin{array}{c}-1\leq x\leq 4,\\x>5;\end{array}\right.$ $⟺x\in ∅.$

3) $\left\{\begin{array}{c}x\leq -1,\\-x-1+x-4>7;\end{array}\right.$ $⟺\left\{\begin{array}{c}x\leq -1,\\0∙x>12;\end{array}\right.$ $⟺x\in ∅.$

Ответ: нет решения.

 Другой подход, напоминающий скорее не раскрытие, а «отбрасывание» модулей, применим к простейшим неравенствам вида |f(x)| ⋁ g(x) и |f(x)| ⋁ |g(x)| [12].

1. **|f(x)|<g(x)** $⇔ $-g(x)<f(x)<g(x) $⇔$ $\left\{\begin{array}{c}f\left(x\right)<g\left(x\right),\\f\left(x\right)>-g\left(x\right).\end{array}\right.$
2. **|f(x)|>g(x)** $⇔\left[\begin{array}{c}f\left(x\right)>g\left(x\right),\\f\left(x\right)<-g\left(x\right).\end{array}\right.$
3. **|f(x)|**$ ∨$ **|g(x)|** $⇔$ f2(x)$ ∨$ g2(x)
4. **(|f(x)|-|g(x)|)∙h(x)**$ ∨0$ метод замены множителя |f(x)| - |g(x)| на множитель f2(x)-g2(x) того же знака.

Воспользуемся определением модуля для доказательства равносильности преобразований неравенства вида **|f(x)|<g(x)** .

|f(x)|<g(x) $\left[\begin{array}{c}\left\{\begin{array}{c}f(x)\geq 0,\\f\left(x\right)<g\left(x\right),\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{c}f\left(x\right)<0,\\-f\left(x\right)<g\left(x\right);\end{array}\right.\end{array}\right.⇔$ $\left[\begin{array}{c}\left\{\begin{array}{c}f(x)\geq 0,\\f\left(x\right)<g\left(x\right),\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{c}f\left(x\right)<0,\\f\left(x\right)>-g\left(x\right);\end{array}\right.\end{array}\right.$ $⇔$ $\left[\begin{array}{c}0\leq f\left(x\right)<g\left(x\right),\\-g\left(x\right)<f\left(x\right)<0;\end{array}\right.$ $⇔$

-g(x)<f(x)<g(x)

Если g(x)<0,то х$\in ∅$ [2].

**Пример 13**. Решить неравенство |x2-2x-3|< 3x-3 $⇔$

* 3-3x < x2-2x-3 < 3x-3 $⇔$
* $\left\{\begin{array}{c}x^{2}-2x-3>3-3x,\\x^{2}-2x-3<3x-3;\end{array}\right.⇔\left\{\begin{array}{c}x^{2}+x-6>0,\\x^{2}-5x<0;\end{array}⇔\right.$
* $\left\{\begin{array}{c}\left[\begin{array}{c}x<-3,\\x>2,\end{array}\right.\\0<x<5;\end{array}\right.⇔2<x<5.$

Ответ: (2;5).

Аналогично, можно доказать равносильность преобразований неравенства вида **|f(x)|>g(x)** .

1) случай при g(x)≥0.

|f(x)|>g(x) $\left[\begin{array}{c}\left\{\begin{array}{c}f(x)\geq 0,\\f\left(x\right)>g\left(x\right),\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{c}f\left(x\right)<0,\\-f\left(x\right)>g\left(x\right);\end{array}\right.\end{array}\right.⇔$ $\left[\begin{array}{c}\left\{\begin{array}{c}f(x)\geq 0,\\f\left(x\right)>g\left(x\right),\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{c}f\left(x\right)<0,\\f\left(x\right)<-g\left(x\right);\end{array}\right.\end{array}\right.$ $⇔$ $\left[\begin{array}{c}f\left(x\right)>g\left(x\right),\\f\left(x\right)<-g\left(x\right).\end{array}\right.$

2) случай при g(x)<0 неравенство |f(x)|>g(x) верно для любого х.

 Но объединением решений неравенств $\left[\begin{array}{c}f\left(x\right)>g\left(x\right),\\f\left(x\right)<-g\left(x\right)\end{array}\right.$ для отрицательных g(x) является также вся числовая ось. Поэтому и при g(x)<0 утверждение $\left[\begin{array}{c}f\left(x\right)>g\left(x\right),\\f\left(x\right)<-g\left(x\right)\end{array} \right.$также выполняется [2].

**Пример 14**. Решить неравенство |x-1|> $\frac{1}{2}$ (x+1) $⇔$

 $\left[\begin{array}{c}2x-2>x+1,\\2x-2<-x-1;\end{array}\right.$ $⇔$ $\left[\begin{array}{c}x>3,\\x<\frac{1}{3}\end{array}\right.$

Ответ: (-∞;$\frac{1}{3}$)∪(3;∞).

**Пример 15**. Решить неравенство |x3-1|$ \geq $ 1-x .

|x3-1|$ \geq $ 1-x $⇔$

$\left[\begin{array}{c}x^{3}-1\geq 1-x,\\x^{3}-1\leq x-1;\end{array}\right.$ $⇔$ $\left[\begin{array}{c}\left(x-1\right)\left(x^{2}+x+1\right)+\left(x-1\right)\geq 0,\\\left(x-1\right)\left(x^{2}+x+1\right)-\left(x-1\right)\leq 0;\end{array}\right.⇔$ $\left[\begin{array}{c}\left(x-1\right)\left(x^{2}+x+2\right)\geq 0,\\\left(x-1\right)\left(x^{2}+x\right)\leq 0;\end{array}\right.⇔\left[\begin{array}{c}x\geq 1,\\x\left(x-1\right)\left(x+1\right)\leq 0;\end{array}\right.⇔\left[\begin{array}{c}x\geq 1,\\x\leq -1,\\0\leq x\leq 1;\end{array}\right.⇔\left[\begin{array}{c}x\leq -1,\\x\geq 0.\end{array}\right.$

Ответ: (-$\infty ;-1]∪[0;\infty )$.

**Пример 16**. Решить неравенство |x-6|>|x2-5x+9| ( 3вид неравенства).

Возведем в квадрат обе части неравенства и, используя тождество |a2|=a2, получим (x-6)2 > (x2-5x+9)2 $⇔$

(x-6)2 - (x2-5x+9)2 >0 $⇔$

(x- 6+x2 - 5x+9)(x- 6-x2+5x-9) > 0 $⇔$

(x2- 4x +3)(-x2+6x-15) > 0 $⇔$

(x-3)(x-1)(x2-6x+15) < 0 $⇔\left\{\begin{array}{c}x^{2}-6x+15>0, x\in R,\\1<x<3;\end{array}\right.$ $⇔1<x<3.$

Ответ: (1;3)

**Пример 17**. Решить неравенство | $\frac{ x^{2}-3x-1}{x^{2}+x+1}|<3$.

Используем свойство | $\frac{a}{b}|$= $\frac{|a|}{|b|}$ получим:

$\frac{\left|x^{2}-3x-1\right|-3|x^{2}+x+1|}{|x^{2}+x+1|}<0,$ так как x2+x+1 >0 , x$\in R$, то данное неравенство равносильно неравенству |x2-3x-1|-|3x2+3x+3|<0 $⇔$

* (x2-3x-1)2- (3x2+3x+3)2<0 ( используем метод замены множителя |f|-|g| на f2 - g2 одного знака)

$⇔$ (x2-3x-1+3x2+3x+3)(x2-3x-1-3x2-3x-3) < 0 $⇔$

(4x2+2)(-2x2-6x-4)<0 $⇔$ (2x2+1)(x2+3x+2) > 0 $⇔$

$\left\{\begin{array}{c}2x^{2}+1>0,x\in R; \\\left(x^{2} +3x+2\right)>0; \end{array}\right.$ $⇔$ (x2 +3x+2)>0 $⇔$

* $\left[\begin{array}{c}x<-2,\\x>-1.\end{array}\right.$

Ответ: (-∞; -2)∪(-1;∞)

**Пример 18**. Решить неравенство: $\left|\frac{x^{2}-3x+2}{x^{2}+3x+2}\right|\leq 1.$

Данное неравенство похоже с предыдущим примером №17, но решим его как неравенство вида |f(x)| < *a*, где *а* константа.

 $\left|\frac{x^{2}-3x+2}{x^{2}+3x+2}\right|\leq 1⟺$ $\left\{\begin{array}{c}\frac{x^{2}-3x+2}{x^{2}+3x+2}\leq 1,\\\frac{x^{2}-3x+2}{x^{2}+3x+2}\geq -1,\end{array}\right.⟺$ $\left\{\begin{array}{c}\frac{-6x}{(x+1)(x+2)}\leq 0,\\\frac{2x^{2}+4}{(x+1)(x+2)}\geq 0,\end{array}\right.⟺$ $\left\{\begin{array}{c}\left[\begin{array}{c}x\geq 0,\\-2<x<-1,\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{c}x>-1,\\x<-2.\end{array}\right.\end{array}\right.$ $⟺$ x≥0.

Ответ: $[0;\infty )$

**Пример 19**. Решить неравенство: |x+1|+|x+2|$\leq 2x+3.$ [2]

Обозначим a=x+1, b=x+2, a+b=2x+3. Тогда в новых переменных наше неравенство выглядит так: |a|+|b | ≤ a+b.

Решим его сначала возведением в квадрат обеих частей неравенства: |a|+|b|≤a+b $⇔$ $\left\{\begin{array}{c}a+b\geq 0,\\(\left|a\right|+\left|b\right|)^{2}\leq (a+b)^{2}\end{array}\right.$ $⇔$ $\left\{\begin{array}{c}a+b\geq 0,\\\left|ab\right|\leq ab;\end{array}\right.$ $⇔$ $\left\{\begin{array}{c}a+b\geq 0,\\ab\geq 0;\end{array}\right.$ $⇔\left\{\begin{array}{c}a\geq 0,\\b\geq 0.\end{array}\right.$

|x+1|+|x+2|$\leq 2x+3$ $⇔$ $\left\{\begin{array}{c}x+1\geq 0,\\x+2\geq 0;\end{array}\right.$ $⇔x\geq -1.$

Ответ:[-1;∞].

**Пример 20**. Найти все целые отрицательные решения неравенства:

 |$\frac{x^{3}}{3}$+70| + |x2-2x-9| ≤ $\frac{|x^{3}+3x^{2}-6x+183|}{3}$ [2].

$a=\frac{x^{3}}{3}$+70, $b=x^{2}-2x-9$, $a+b=\frac{|x^{3}+3x^{2}-6x+183|}{3}$

Докажем неравенство $\left|a\right|+\left|b\right|\leq \left|a+b\right|$:

 $ \left|a\right|+\left|b\right|\leq \left|a+b\right| ⇔(\left|a\right|+|b|)^{2} \leq (|a+b|)^{2} ⇔$

$$a^{2}+2\left|ab\right|+b^{2}\leq a^{2}+2ab+b^{2}⇔|ab|\leq ab⇔ab\geq 0.$$

Используем доказанное неравенство при решении исходного неравенства, выполнив равносильный переход

|$\frac{x^{3}}{3}$ +70| + |x2-2x-9| ≤ $\frac{|x^{3}+3x^{2}-6x+183|}{3}$ $⇔$

$⇔$ ($\frac{x^{3}}{3}$ +70) ∙ (x2-2x-9)≥0.

Точки, в которых левая часть равна нулю: -$ \sqrt[3]{210}$; 1±$ \sqrt{10}$.

 Оценим их: -$\sqrt[ 3]{210}\in (-6;-5)$; 1-$ \sqrt{10}\in \left(-3;-2\right);$ 1+$ \sqrt{10}\in (4;5)$.

 Поэтому решение неравенства x$\in $ [-$\sqrt[3]{210}$; 1-$\sqrt{10}]∪[1+\sqrt{10};\infty )$, а целые отрицательные решения: -3;-4;-5.

Ответ: -3;-4;-5.