# Приложение-1

## Проектная работа (приведена в сокращении)

### Тема: «Традиционные и нестандартные задачи на построение»

### Выполнила: Кобаидзе Нина Иванована

школа - МБОУ ордена «Знак почёта» им. Луначарского А.В. гимназия №5

город - Владикавказ, РСО-Алания

страна - РФ

**Учитель – методист** МБОУ ордена «Знак почёта» им. Луначарского А.В. гимназии №5

### Традиционные и нестандартные задачи на построение.

**Цель:** рассмотреть идеи и методырешения некоторых известных и нестандартных задач на построение для развития и формирования УУД у учащихся.

**Задачи:** научить переносить проблемы в новые ситуации, выявлять круг идей и расширять их, владея уже определенной техникой построения чертежей и знаниями о свойствах фигур;

осуществлять преемственность при переходе из класса в класс,

уметь организовывать работу над задачей на построение олимпиадного или исследовательского характера.

**План**

I. Введение

II. Задачи на построение

 1. Исторические сведения о геометрических построениях

 2. Задачи на построение одной линейкой

 3. Задачи на построение одним циркулем

 4. Решение нестандартных задач на построение

III. Заключение.
Введение

Решение олимпиадных задач или задач исследовательского характера служит хорошей подготовкой к будущей научной деятельности, заостряет интеллект. Но сразу начинать с трудных задач – это невозможно. Значит, надо брать те задачи, которые понравились и доступны. Надо постепенно осваивать идеи и методы решения задач.

1) Можно сначала прочитать описание идеи, потом рассмотреть уже разобранные задачи, потом только попытаться решать самому.

2) Можно сразу начать с задач, чтобы самим уловить идею, а уже потом прочитать комментарии и разобрать решение задачи. (Идея – это путь к решению, а метод – это алгоритм решения.)

Мы будем рассматривать задачи на построение с помощью циркуля и линейки (как известные, так и нестандартные).

Как решать задачи, советов много. А наш совет – это ответ на вопрос: что надо делать уже после решения самостоятельно составленной задачи. Надо ещё раз подумать над этой задачей, т. е. провести исследование. Известно, что решение задач на построение состоит из четырёх этапов: анализ, построение, доказательство и исследование. Поэтому попробуйте понять: сколько решений имеет задача?

Какие идеи привели к решению, чем эта задача не похожа на другие?

Будет ли задача иметь решение, если какое-то условие убрать или ослабить? (Например, построить только с помощью циркуля).

Можно ли данные и ответ поменять местами, т. е. верно ли обратное утверждение?

Можно ли этот метод обобщить или вывести какие-то следствия?

Если у вас после решения хорошей задачи поднимется настроение - это признак успешной работы.

Если задача очень трудна для вас, то попытайтесь найти и решить похожую («родственную») задачу. Это часто подсказывает идею для решения трудной (исходной) задачи, например, поступить следующим образом:

* свести задачу к более известной;
* рассмотреть более простой (частный) случай, а потом обобщить, проверив доказательство;
* разбить задачу на несколько задач, т. е. рассмотреть (необходимость и достаточность) доказательство;
* если удалось решить, т. е. понять задачу, то отдохните, а затем ещё раз хорошо всё продумайте.

Лучше решить одну задачу самому, чем десять – не закончить, пользы – никому. «Геометрия есть искусство рассуждать на неправильных чертежах». Д. Пойа.

Решение каждой геометрической задачи начинается с чертежа, и качество чертежа влияет на успешность решения. Иногда считают, что не надо обращать внимание на качество рисунка и соответствие его условиям задачи. Мы не будем придерживаться этой точки зрения, и поскольку при подготовке чертежа есть некоторые тонкости, сформулируем несколько пожеланий по поводу рисунка.

Сначала рисунок лучше выполнять карандашом, так как на нём могут появляться вспомогательные элементы, связанные с условиями задачи и помогающие построить чертёж, по возможности согласованный с данными. Не рисуйте заведомо «провокационных» чертежей, т. е. фигура на чертеже не должна «добавлять» новые по сравнению с данными свойства. Чаще всего оказывается более удобным строить чертёж на основе свойств, указанных в условии объектов.
Исторические сведения о геометрических построениях.

Еще с древности греческие математики встретились с тремя задачами на построение, которые не поддавались решению. Это следующие задачи:

1. Задача о квадратуре круга
2. Задача о трисекции угла
3. Задача об удвоении куба

В то время многие математики пытались построить циркулем и линейкой квадрат, равный по площади данному кругу. Эту задачу называют квадратурой круга. Гиппократ думал, что с помощью своих луночек он решит эту задачу. Но хотя он и построил луночки с похожими свойствами, сделать из круга квадрат не удалось и ему. Теперь ученые знают, что квадратура круга невозможна. Какие бы построения циркулем и линейкой мы не делали, квадрат, равный по площади данному кругу, построить не удастся.

### Одной линейкой.

Дан конечный набор точек, линейка и карандаш. Какие новые точки тогда можно построить?

Уточним постановку задачи. Точку будем считать построенной, если она одна из данных или является пересечением двух построенных прямых; в свою очередь, прямую будем считать построенной, если она проходит через построенные (в частности, данные) точки. Общая задача состоит в том, чтобы ***описать множество точек, которые можно построить исходя из данного конечного набора точек.***

Ясно, что если даны одна, две или три точки, никаких новых точек построить нельзя (рис.1). Если даны четыре точки, какие-то три из которых (или все четыре лежат на одной прямой), то, очевидно, никаких новых точек построить нельзя (рис.2); если, наконец, даны четыре точки, лежащие в вершинах параллелограмма, можно построить только одну точку — его центр (рис.3).

  Рис. 1  Рис. 2

  Рис. 3  Рис. 4

Пусть теперь даны четыре точки, не образующие вершины параллелограмма и такие, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Для краткости будем говорить, что такие точки находятся в общем положении.

Рассмотрим сначала частный случай: данные точки P, Q, P`, Q`лежат в вершине трапеции (рис.4). В первых шести задачах эта конфигурация считается заданной.

**Задача 1.** ***Разделите отрезок PQ пополам.***

**Решение** показано на рисунке 4. На нем черными изображены данные точки P, Q, P`, Q` и более жирно выделены параллельные прямые PQ, P`Q` , дальнейшие построения выполнены тонкими линиями, причем номерами указан порядок проведения прямых.

**Задача 2.** ***Удвойте отрезок P`Q`.***

**Решение** показано на рисунке 5; на нем черным изображена и уже построенная точка F – середина PQ. Равенство P`Q` = Q`R` следует из подобия треугольников PMF~R`MQ` , FMQ~Q`MP` и равенства PF=FQ.

**Задача 3.** ***Постройте отрезок длиной n·P`Q`.***

****** Рис. 5  Рис. 6

Для этого нужно просто n — 1 раз повторить процедуру, использованную в предыдущей задаче. На рисунке 6 построение показано для n=3.

Разумеется, аналогично на прямой PQ можно построить отрезок длины m·PQ.

**Задача 4. *Разделите отрезок P`Q` на m равных частей.***

**Решение.** Сначала на прямой PQ строим m — 1 равных отрезков PQ2, Q2Q3, …, Qm-1 Qm. Затем строим прямые РР` и QmQ` и соединяем их точку пересечения А с точками Q2, Q3, …, Qm-1, Qm. Полученные m-1 прямые делят P`Q` на m равных частей. Для m=4 конструкция показана на рисунке 7.

Заметим, что конструкция не проходит, если PP`║QmQ`. Но эту трудность легко обойти: можно сначала удвоить PQ , затем построить m отрезков, равных удвоенному отрезку, и далее повторить указанное в предыдущем абзаце построение.

 Рис.7

Для дальнейшего нам придется предположить, что данные точки F, Q, P`, Q` - рациональные т.е. имеют рациональные координаты относительно некоторой системы координат.

**Задача 5. *Постройте произвольную рациональную точку S на прямой PQ.***

**Решение.** Для рациональных точек P, Q, S отношение PS:PQ рационально (докажите!), и значит, PS =PQ, где m, nN. Поэтому достаточно разделить отрезок PQ на n равных частей и m раз отложить от точки P полученный отрезок.

Точно так же можно построить любую рациональную точку TP`Q`.

**Задача 6. *Построить произвольную рациональную точку Т на плоскости.***

**Решение.** Допустим, точка T уже построена. Проведем прямые ТР` и TQ`; они пересекут, PQ в точках Е и F. Так как прямые ТР`, TQ`, PQ рациональны (т.е. записываются в виде линейных уравнений с рациональными коэффициентами), координаты точек Е и F получаются как решение систем линейных уравнений с рациональными коэффициентами и поэтому тоже рациональны. Умея строить Е и F, мы построим и точку Т.

Итак, отправляясь от трапеции с рациональными вершинами, можно построить вообще любую рациональную точку! Естественно спросить — а какие еще точки можно построить? Оказывается – никаких.

**Задача 7. *Докажите, что любая точка, построенная одной линейкой из набора рациональных точек, рациональна.***

Действительно, прямая, проходящая через рациональные точки, рациональна и точка пересечения рациональных прямых (как решение системы линейных уравнений с рациональными коэффициентами) тоже рациональна.

Пусть теперь А, В, С, D — четыре рациональные точки, находящиеся в общем положении. Вы, наверно угадали, какие точки можно построить исходя из точек А, В, С, D — конечно же, как и в предыдущем случае, все рациональные. Более того, ясно, как можно постараться закончить доказательство этого факта: достаточно получить две параллельные прямые. Но это как раз самая трудная часть наших построений.

По условию точки А, В, С, D либо образуют выпуклый четырехугольник, отличный от параллелограмма, либо одна из точек находится внутри треугольника, образованного остальными тремя точками. Проведя в каждом из этих случаев прямые, как на рисунке 8 (а,б), получим одинаковые конфигурации. Поэтому введем новые обозначения (см. рисунок 9, на котором данные и построенные точки не различаются).

Рис. 8 а)  б) 

Впрочем, из наших условий не следует, что прямые EF и MN пересекаются: они могут быть и параллельными. Когда же это произойдёт?

**Задача 8. *Докажите, что если MK=KN , то MN || EF .***

**Решение** легко получить, если вспомнить решение задачи 2.

**Задача 9. *В случае, когда MK=2KN, постройте прямую, параллельную MN.***

**Решение.** Сперва докажем, что в нашем случае MN = NL. Для этого нам придется применить теоремы *Чевы* и *Менелая*.

Менелай Александрийский, древнегреческий математик и астроном, живший в I в. н. э. **Теорема:** ***Пусть на сторонах или на продолжениях сторон АВ, ВС и СА треугольника АВС отмечены точки С1, А1,В1, не совпадающие с его вершинами, причем , , . Тогда если точки С1, А1, В1 лежат на одной прямой, то pqr = -1; обратно: если pqr = -1, то точки С1, А1, В1 лежат на одной прямой.***

Рис. 9



Джованни Чева – итальянский математик и инженер (1648 – 1734). **Теорема:** ***Пусть на сторонах или на продолжениях сторон АВ, ВС и СА треугольника АВС отмечены точки С1, А1,В1, не совпадающие с его вершинами, причем , , . Тогда если прямые АА1, ВВ1, СС1 пересекаются в одной точке или попарно параллельны, то pqr=1; обратно: если pqr=1, то прямые АА1, ВВ1, СС1 пересекаются в одной точке или попарно параллельны.***

Первая из этих теорем утверждает, что если вершины треугольника EFK (рис.9) лежат соответственно на прямых MS, SN, NM, то получим равенство:



Вторая утверждает, если точки E, F, L лежат соответственно на прямых SM, SN, MN и расположены на одной прямой, то:



Сопоставляя равенство (1) и (2), получаем: ML=2NL, откуда MN=NL. А теперь построение параллельной прямой легко получается известным нам, в сущности, способом (рис.10).

Рис. 10

**Задача 10. *В случае, когда 2MK = 3KN , постройте прямую, параллельную МN.***

**Указание.** Покажите, что MN=2NL (см. рис.9), и примените задачу 9.

**Задача 11. *Постройте прямую параллельную прямой MN, в общем случае.***

Решение нам подсказывают предыдущие задачи. Пусть МК:КN = p:q, где p>q (случай p<q сводится к этому переименованием точек). Рассуждать мы будем индукцией по l. Базис индукции, т.е. случай *l* = 1, уже разобран (задача 8). Предположим, что при p, q≤l мы умеем по точкам M, K, L строить прямую, параллельную MN. Пусть теперь MK:KN = (*l*+1):q. Сопоставляя (1) и (2), получаем:



и можно воспользоваться предположением индукции, согласно которому по точкам M, N, L можно построить прямую, параллельную прямой MN.

Таким образом, мы доказали следующую замечательную теорему:

**Теорема.** ***Множество точек, которые можно построить одной линейкой из четырёх рациональных точек, находящихся в общем положении, состоит из всех рациональных точек плоскости.***

Очевидно, увеличение исходных рациональных точек не меняет множества точек, которые можно построить.

Наверное, читателю хотелось бы узнать, какие точки можно построить исходя из четырех точек в общем положении, не все координаты которых рациональны. К сожалению, чтобы хорошо и точно сформулировать ответ, необходимо привлечь понятие из проективной геометрии. Однако интуитивно ясно, что в указанном случае получается множество точек, очень «похожее» на множество всех рациональных точек. Если говорить более точно, то данное множество «проективно-эквивалентно» множеству рациональных точек.
Построение одним циркулем

Среди бесчисленных задач на построение встречаются такие, в которых построение требуется произвести одной линейкой или одним циркулем. Однако давно известно, что отсутствие линейки не сужает круга возможных построений**: *всякое построение, выполнимое циркулем и линейкой, можно проделать одним циркулем.***

Идея о построении с помощью одного циркуля была выдвинута еще итальянским ученым Джованни Баттиста Бендетти (1530-1590). В 1672 году появилась книга «Euclidus Danicus» датского геометра Георга Мора (1640-1697). В ней он показал, что все задачи, которые сводятся к квадратным уравнениям, можно решить геометрически с помощью одного циркуля. Более чем через 100 лет, в 1797 году, эта задача была вновь поставлена и решена итальянцем Лоренцо Маскерони (1750-1800). Соответствующее утверждение называют **теперь *теорема Мора – Маскерони****.*

Во всех решаемых ниже задачах на построение мы ограничиваемся кратким описанием самого построения.

**Формулировка результата**

Разумеется, нельзя провести циркулем прямую, поэтому все рассматриваемые задачи на построение должны состоять в построении некоторой точки (на плоскости).

**Теорема. *Предположим, что точка М может быть построена по точкам А1, …, Аn при помощи циркуля и линейки. Тогда точка М может быть построена по точкам А1*,…, *Аn при помощи одного циркуля****.*

Чтобы доказать эту теорему, посмотрим, какие построения производятся линейкой. С помощью линейки можно провести через две данные точки прямую и найти ее точки пересечения с раннее построенными прямыми и окружностями. Но так как с самого начала нам были даны только точки, всякая ранее построенная прямая была некогда проведена через 2 еще ранее построенные точки, и всякая ранее построенная окружность имеет своим центром ранее построенную точку. Таким образом, в процессе построения линейка применяется только к решению одной из двух следующих задач.

**Задача 1. *По данным точкам A, B, C, D найти точку пересечения прямых АВ и CD.***

**Задача 2. *По данной окружности с данным центром О и данным точкам А и В найти точки пересечения окружности S с прямой АВ.***

Наша теорема будет доказана, если мы установим, что обе эти задачи могут быть решены при помощи одного циркуля.

### Вспомогательные построения

В этом и следующем пунктах, говоря «построение», мы подразумеваем построение одним циркулем. Мы начнем с решения четырех вспомогательных задач.

**Задача 3. *Даны (различные) точки А и В. Постройте на луче АВ точку С такую, что АС=2АВ.***

**Построение** (рис. 1). Проведем через точку А окружность с центром О. На этой окружности трижды отложим отрезок АВ, начиная от точки А. Получившаяся при третьем откладывании точка С удовлетворяет требованиям задачи.

 Рис. 1 Рис. 2

 

**Задача 4.** ***Дана окружность с центром О и дуга АВ на ней. Постройте точку, делящую эту дугу пополам.***

 **Построение.** Через точку О проведем окружности с центрами А и В. Проведем окружность с центром О и радиусом АВ. Возьмем 2 точки: Р и Q – точки пересечения этой окружности с двумя построенными; тогда дуги ОР и

 OQ равны дуге АВ. Затем через точки В и А проведем окружности с центрами Р и Q до их пересечения в точки R. Наконец, радиусом OR проведем окружность с центром P или Q. Точка С пересечения этой окружности с дугой АВ и будет искомой.

**Задача 5. *Дана окружность S с центром О и точка Р ≠ О. На луче ОР постройте точку Р’ такую, что ОР ∙ ОР’ = r2, где r – радиус окружности S.***

(Такая точка Р’ называется симметричной точке Р относительно окружности S.)

Рис. 3

**Построение.** ***Случай 1.*** Точка Р лежит вне окружности S (рис. 3). Проведем через точку О окружность с центром Р. Пусть Q и R – точки ее пересечения с окружностью S. Проведем через точку О окружности с центрами Q и R. Отличная от О точка пересечения этих окружностей и есть искомая точка Р1.

(Это построение проходит и в случае, когда точка Р лежит внутри окружности S, но находится от ее центра О на расстоянии, большем r/2.)

***Случай 2****.* Точка Р лежит внутри окружности S. Пользуясь построением задачи 3, мы последовательно строим на луче ОР точки Р2, Р3, … такие, что ОР2 = 2ОР, ОР3 = 3ОР, …, пока не дойдем до точки Рn, которая будет лежать вне S. Для точки Рn, которая будет лежать вне S. Для точки Рn мы строим симметричную относительно окружности S точку Р’n, пользуясь предыдущим построением. Наконец, на луче ОР’1 (т. е. на луче ОР) мы строим точки Р’2, Р’3, … такие, что ОР’2 = 2ОР’1, ОР’3 = 3ОР’1, … Точка Р’n и будет искомой.

**Задача 6.** ***Даны окружность S с центром О и несовпадающие точки А, В. Постройте окружность, проходящую через точку О и точки пересечения прямой АВ с окружностью S (в предположении, что прямая АВ не проходит через центр окружности S и пересекает ее в двух точках). Докажите, что эта окружность, за вычетом точки О, представляет собой геометрическое место точек, симметричных точкам прямой АВ относительно окружности S.***

**Построение** (рис. 4). Проведем через точку О окружности с центрами А и В. Точку их пересечения, отличную от О, обозначим через Р. Построим точку Р’, симметричную точке Р относительно окружности S (задача 5), и построим окружность с центром Р’, проходящую через О. Это и есть искомая окружность.

**** Рис. 4

**Основные построения**

**Построение к задаче 2.** Если точка О не лежит на прямой АВ, проходит построение задачи 6 и даже его упрощенный вариант: мы строим точку Р, как в задаче 6, и затем проводим окружность с центром Р радиусом, равным радиусу окружности S (зная центр окружности S, мы можем радиус окружности измерить циркулем); точки пересечения построенной окружности с данной окружностью – искомые точки. Если точка О лежит на прямой АВ, то это построение не пройдет: точка Р сольется с точкой О. Тогда мы применяем другое построение (рис. 5): с центром А (или с центром В, если А = О) проводим произвольную окружность, пересекающую окружность S в двух точках, обозначаем точки пересечения через С и D и делим дуги СD и DС окружности S пополам (задача 4). Точки деления и будут искомыми.

Рис. 5 **** Рис. 6 

**Построение к задаче 1** (рис. 6). Построим произвольную окружности S, внутри которой содержаться все данные точки и центр О, который не лежит ни на одной из прямых АВ и CD. (Это легко сделать «на глазок», но для «строгого построения» такой рецепт не годится). Можно поступить так: построить произвольную окружность, найти, пользуясь построением задачи 2, точки ее пересечения с прямыми АВ и CD и взять в качестве О точку построенной окружности, отличную от найденных точек.) Затем, пользуясь построением задачи 6, строим окружность S1, проходящую через О и через точки пересечения окружности S с прямой АВ, и окружность S2, проходящую через О и через точки пересечения окружности S с прямой CD. Затем мы обозначаем через Р точку пересечения окружностей S1 и S2, отличную от О, и строим точку Р’, симметричную точке Р относительно окружности S. Это и есть искомая точка.

**Заключительные замечания**

**1.** Если данные задачи на построение включают в себя не только точки, линейка может оказаться для ее решения необходимой. Например: даны кривая с и точки А, В; нужно найти точки пересечения кривой с прямой АВ. Это, вообще говоря, нельзя сделать без линейки. Однако бывает, что подобные задачи сводятся к задачам рассмотренного типа и решаются одним циркулем. Например: на плоскости нарисована окружность; требуется, пользуясь одним циркулем, найти ее центр. Это можно сделать так: отметим на окружности три точки А, В, С; как известно, циркулем и линейкой можно построить центр окружности, описанной около треугольника АВС; значит, это можно сделать и одним циркулем. (Впрочем, задача имеет гораздо более простое решение – найдите его!) Мы видим, кстати, что в задачах 2, 4, 5 и 6 не обязательно было указывать центр заданной окружности.

**2.** Одной линейкой можно проделать не всякое построение, выполнимое циркулем и линейкой. Существует, однако, поразительная теорема Штейнера, согласно которой все построения, выполнимые циркулем и линейкой, могут быть проделаны одной линейкой, если на листе предварительно нарисована окружность и отмечен ее центр.

## Нестандартные задачи.

 Только интерес и любопытство, удивление и поиск могут заставить ученика задуматься над тем или иным вопросом. Как же порождать творческую активность и пробуждать интерес к математике? Хотя бы иногда решать нестандартные задачи. Обязательно проводить кружковую работу или факультативы.

**Задача 1.** С помощью циркуля и линейки провести из данной точки А прямую, перпендикулярную данной прямой l, проводя не более трёх линий (третья линия есть искомый перпендикуляр).

а) А*l*

****Рис. 1

**Построение (решение для 8 класса)**

1. Провести окружность (А; АМ) – первая линия.
2. Провести вторую окружность (М; МА) – вторая линия.
3. Провести прямую АF – третья линия.

AFl (MN). Точки M, F, N, A – это вершины ромба, а диагонали ромба взаимно перпендикулярны. Следовательно, MNAF. AF – искомый перпендикуляр.

б) А *l*

 *Рис.2*

**Построение (7-8 класс)**

Провести окружность (А; R), где R=AF=AN.

Окружность можно не проводить, а только отметить точки F и N так, что АF=АN.

1. Провести окружность (F; R), где R>½FN – 1 линия.
2. Провести окружность (N; R), где R>½FN – 2 линия
3. Соединить точки M и E. ЕАFN. ЕМ – искомый перпендикуляр.

 **Задача 2.** Найти значения выражения при х=2 и построить отрезок, длина которого равна числовому значению этого выражения.



**Решение**.

В знаменателе (в части) следует применить формулу:

.

Подставляя х=2 (в) и, используя эту формулу, получим:



т. е. ,

аналогично имеем: .

Следовательно, 

Как построить отрезок ОС= и чему равно приближенное значение ?

Показать геометрическим построением отрезок равный .

**Построение.**

**** Рис. 3

1) Треугольник – равнобедренный и прямоугольный.

2) Найдем гипотенузу по теореме Пифагора:

12+12=2, гипотенуза равна . 3) Учитывая масштаб на рисунке, .

**Задача 3.** В треугольнике АВС известны стороны ВС=а, СА=b и АВ=с. Найти отрезки сторон, на которые они делятся точками касания с вписанной окружностью.

**Вписанные и описанные окружности обладают целым рядом похожих свойств**. Такие свойства и будут интересовать нас в первую очередь. Суть сходства хорошо иллюстрируют задачи 3 и 4.

**Решим** задачу 3. Отрезки двух сторон, имеющие общую точку – вершину треугольника, попарно равны (рис. 4); обозначая их соответственно через х, у и z, получаем систему уравнений х+у=с, у+z=а, z+х=b, из которой найдем    где р – полупериметр треугольника.

Полученные формулы следует отнести к категории «рабочих»: во многих конкурсных, олимпиадных задачах, в ЕГЭ они оказываются полезными, и поэтому их стоит запомнить (применять).

 Рис. 4  Рис. 5

**Задача 4.** В треугольнике АВС известны углы А, В и С. Найти углы образованные радиусами описанной окружности, идущими в вершины треугольника, со сторонами, сходящимися в этих вершинах. Аналогичным образом можно решить 4-ую задачу (как и 3-ю, см. рис. 5).

**Решение.** Углы, прилежащие к одной стороне треугольника, попарно равны, обозначая их через х, у, z, получим систему уравнений:

, из которой 

В отличие от предыдущего случая, возможны отрицательные значения углов.

**Задача 5.** Построить общую внешнюю касательную к двум окружностям. Рис.6

 M

 С N

 О2

 O1

Решение.

а) Если одна из окружностей будет точкой, то задача станет легче (надо вспомнить, как из точки провести касательную)

 б) Пусть О1 и r1-центр и радиус меньшей окружности, О2 и r2 –центр и радиус большей окружности.

* Рассмотрим прямую, проходящую через О1 и параллельную общей касательной (см. рис.6). Эта прямая удалена от О2 на расстояние r2 – r1,

 значит, является касательной к окружности с центром О2 и радиусом r2-r1.

* Построим эту окружность с центром О2 и радиусом r2 – r1.
* Из точки О1 проведем касательную к ней (продолжим).

Пусть точка С – точка касания. На прямой О2С лежит искомая точка касания. Построим внешнюю касательную MN (искомая).

Применим задачи 3 и 5 к решению задачи 6, взятой из ЕГЭ (С-4).

 **Задача 6.** В треугольнике АВС АВ=7, ВС=9, СА=4. Точка D лежит на прямой ВС так, что BD:DC=1:5. Окружности, вписанные в каждый из треугольников АDС и АВD, касаются стороны AD в точках Е и F. Найти длину отрезка ЕF.

**Решение.** Пусть АD=d, BD=x, DC=y. Подсчитывая разными способами периметры треугольников АDC и АВD, получаем:

 

В этой задаче применяются формулы, которые мы получили в задаче 3.

(   где р – полупериметр треугольника).

Возможны два случая.

1. Точка D лежит на отрезке ВС (рис. 7).
2. Точка D лежит вне отрезка ВС (рис. 8).

 

 Рис. 7 Рис. 8

АD – общая касательная (точка D лежит на отрезке ВС, точка D лежит вне отрезка ВС)

1 случай. Тогда ВD=1,5, DC=7,5, .

2 случай. Тогда ВD=2,25, DC=BD+9=11,25.

Значит, ЕF=6.

Задача 7.Окружность с центром в точке O касается боковой стороны AC равнобедренного треугольника ABC, продолжения боковой стороны AB и продолжения основания BC в точке N. M – середина BC.
 Доказать: а) AN=OM, б) найти OM; если стороны треугольника 13, 13, 24.
**Решение и построение**. 1сп. построения – начать с окружности и построения лучей BN и BT

(касательных к окружности); строим равнобедренный треугольник с учётом данных.
2сп. – можно сначала построить равнобедренный треугольник, затем вневписанную окружность. (Учащиеся предпочли 2сп.)
Учитывая все особенности условия задачи и получения результата, строим чертёж.
 ( Учит нас этому, учитель учителей, доцент Дятлов В.Н.)

 Рис.9

1) ABC- равнобедренный, т.е. *;*
 *.* Значит,. AO MN; MAON – прямоугольник.2) Найдём длины AT и AL. AT= у и AL = у (как отрезки касательных, проведённых из точки А).CL=CN=x (как отрезки касательных, проведённых из точки С).Составим систему:
; х=1; у=12.
3) Найдём MO=AN, AM=5, MN=12+x, MN=13, MO=. MO=AN=
 Ответ: **Задача 8. Задача Максвелла.**Внутри произвольного ΔАВС берется (∙)D и соединяется отрезками прямых с его вершинами. Доказать, что если построить треугольник со сторонами, параллельными отрезкам AD, BD и CD, и через его вершины провести прямые, параллельные сторонам ΔАВС, то эти прямые пересекутся в одной точке.

**Построение и доказательство:**

1) Опишем около ΔАВD, ΔСАD и ΔВDС окружности. Для этого построим перпендикуляры к сторонам этих треугольников.

2) Обозначим точки пересечения серединных перпендикуляров О1, О2, О3 – это и есть центры окружностей около ΔАВD, ΔСАD и ΔВDС.

3) Из (·)О1 проведем перпендикуляр к АВ, из (·)О2 – перпендикуляр к АС и из (·)О3 – перпендикуляр к ВС. Эти перпендикуляры проходят через середины сторон ΔАВС и поэтому пересекаются в одной точке О.

4) Теперь проведем отрезки О1О2, О2О3, О1О3.

Отрезок О1О3 перпендикулярен общей хорде ВD двух окружностей, поскольку принадлежит прямой, проходящей через их центры.

5) Аналогично О1О2АD, О2О3DC.

6) Если теперь повернуть ΔО1О2О3 на прямой угол относительно точки О, например, по движению часовой стрелки, то в новом положении отрезок О1О2 станет параллелен АD, отрезок О1О3 – параллелен ВD и отрезок О2О3 – параллелен DC. Итак, стороны повернутого ΔО1О2О3 окажутся параллельными отрезкам AD, BD и CD, а отрезки ОО1, ОО2, ОО3, пересекающиеся в общей точке О, будут параллельны соответственным сторонам ΔАВС, что и требовалось доказать.

**Задача 9. Задача Горнера о «бабочке».**

Дана окружность с центром в точке О. Точка S – середина ее хорды АВ. Хорды СD и EF проходят через точку S (см. рис.). Хорды ЕD и СF пересекают хорду АВ соответственно в точках N и M (получилась фигура, похожая на бабочку, вписанная окружность). Доказать, что МS=SN.

**Построение и доказательство:**

1) Пусть точка G – середина отрезка СF, а точка К – середина отрезка ED.

2) ΔЕSD и ΔСSF подобны, а SK и SG – их соответствующие медианы. Отсюда получаем равенство углов: MGS=SKN.

3) Проведем отрезки МО и NО. Используя только полученное равенство, можно доказать, что NОS=МОS.

4) Тогда получится, что прямоугольные ΔSNО и ΔSМО равны (SО – общая и NОS=МОS).

Следовательно, равны и отрезки МS и NS, что и требовалось доказать.

**Задача 10.** Дан круг. Геометрическим построением разделить его на три концентрические фигуры – круг поменьше и два концентрических кольца – так, чтобы площади всех трех фигур были равны между собой.

**Построение и решение:**

1) Построим на радиусе АВ данного круга круг, разделим отрезок АВ на три равных отрезка точками С и D (см. рис.10), через точки С и D проведем перпендикуляры к АВ до пересечения с построенной полуокружностью соответственно в точках Е и F.

2) Отрезки FB и ЕВ – радиусы искомых окружностей, разделяющих данный круг на попарно равновеликие концентрические кольца. Докажем это.

**Доказательство:**



1)Sкр=R2, где R=АВ. DB=; АD=.

2) FD=– среднее пропорциональное; FD=.

3) По теореме Пифагора найдем ВF – гипотенузу ΔВDF.

ВF=

4) Площадь круга, концентрического данному,

с радиусом BF равна , как и требовалось. Рис.10

5) Найдем ВЕ – гипотенузу ΔЕСВ.

ВЕ2=ВС2+ЕС2

ВС=АD=R; ЕС=FD=.

ВЕ=.

S круга, концентрического данному с радиусом ВЕ равно , как и требовалось.

6) Площадь каждого из колец равна .

**Задача 11.**

**Построить:** прямоугольный треугольник по медианам, проведенным к катетам.

**Построение:**

1) На ma = АЕ, как на диаметре, построим полуокружность.

2) Продолжим ma так, чтобы ED=ma.

3) Проведем дугу окружности с центром в (∙)D и радиусом mb.

4) (∙)С, точка пересечения дуги и полуокружности является вершиною прямого угла искомого треугольника.

**Заключение**

Смысл и основа вышеизложенных известных положений, как основных, так и вспомогательных при решении задач на построение заключается в том, что если данные задачи включают в себя точки, то линейка может оказаться для ее решения необходимой.

1. Было доказано, что множество точек которые можно построить одной линейкой из четырех рациональных точек, находящихся в общем положении, состоит из всех точек плоскости.

2. Разумеется, нельзя провести циркулем прямую, поэтому все рассматриваемые задачи на построение должны состоять в построении некоторой точки (на плоскости).

3. Одной линейкой можно проделать не всякое построение, выполнимое циркулем и линейкой. Если же на листе предварительно нарисована окружность и отмечен ее центр, то согласно поразительной теореме Штейнера, все построения, выполнимые циркулем и линейкой, могут быть проделаны одной линейкой.

Интересный вопрос для исследования «красивых» задач на построение.

4. Однако, всякое построение, выполнимое циркулем и линейкой, можно проделать одним циркулем.

В заключение хочется сказать, что именно поиск решения задач на построение, их исследование ведут к новым идеям и методам. Так математики, изучая Евклидовую геометрию, его теории и предположения (в том числе его пять постулатов (допущений), первые три постулата Евклида – это и есть аксиомы геометрических построений с помощью идеальной линейкой и идеального циркуля) и, занимаясь различными исследованиями, делали выдающиеся открытия, и вносили большой вклад в мировую науку. Конечно, они, бесспорно, вели к совершенствованию, как саму геометрию, так и другие науки.

Нам с учащимися тоже нравятся задачи на построение. Порой мы долго над ними думаем, задачи становятся громоздкими, обрастают какими-то лишними выкладками. Но блестящая мысль, осенившая вдруг, решает все проблемы. Мысли награждаются мыслями: задача решена!

**Список литературы:**

1) Конель-Белов А.Я., Ковальджи А.К. Как решают нестандартные задачи. – М.: МЦНМО, 2008. – 65, 57 с

2) Березин В.Н., Березина Л.Ю., Никольская И.Л. Сборник задач для факультативных и внеклассных занятий по математике. – М.: Просвещение, 1985. – 65, 69, 74 с.

3) Михеев Ю. Одной линейкой // Квант (приложение к №1/1998). – 1998. – 79 с.

4) Фукс Д. Построение одним циркулем // Квант (приложение к №1/1998). – 1998. – 85 с.