Признак перпендикулярности прямой и плоскости

Никифоров С.В.

ГБОУ Лицей 1546

26 февраля 2014 г.

Умственный труд на уроках математики - пробный камень мышления.
В.А. Сухомлинский

Умственный труд на уроках математики - пробный камень мышления.
В.А. Сухомлинский

Признак перпендикулярности прямой и плоскости

Цель урока

1. Повторить определения, лемму и теоремы о перпендикулярных прямых и плоскостях.
2. Решить задачу № 119.
3. Доказать признак перпендикулярности прямой и плоскости.
4. Показать применение признака перпендикулярности при решении задач.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости

Цель урока

1. Повторить определения, лемму и теоремы о перпендикулярных прямых и плоскостях.
2. Решить задачу № 119.
3. Доказать признак перпендикулярности прямой и плоскости.
4. Показать применение признака перпендикулярности при решении задач.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости

Цель урока

1. Повторить определения, лемму и теоремы о перпендикулярных прямых и плоскостях.
2. Решить задачу № 119.
3. Доказать признак перпендикулярности прямой и плоскости.
4. Показать применение признака перпендикулярности при решении задач.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости

Цель урока

1. Повторить определения, лемму и теоремы о перпендикулярных прямых и плоскостях.
2. Решить задачу № 119.
3. Доказать признак перпендикулярности прямой и плоскости.
4. Показать применение признака перпендикулярности при решении задач.

Повторение темы: Перпендикулярные прямые

Какие прямые называются перпендикулярными в пространстве?

Повторение темы: Перпендикулярные прямые

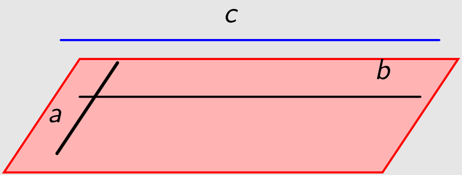
Какие прямые называются перпендикулярными в пространстве?

Две прямые в пространстве называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90°.

Повторение темы: Перпендикулярные прямые

Какие прямые называются перпендикулярными в пространстве?

Две прямые в пространстве называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90°.



$a \perp b$

$a \perp c$

Повторение темы: Перпендикулярные прямые

Что утверждает лемма о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей прямой?

Повторение темы: Перпендикулярные прямые

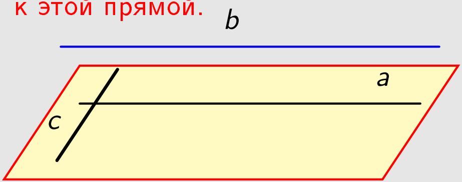
Что утверждает лемма о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей прямой?

Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к третьей прямой, то и другая прямая перпендикулярна к этой прямой.

Повторение темы: Перпендикулярные прямые

Что утверждает лемма о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей прямой?

Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к третьей прямой, то и другая прямая перпендикулярна к этой прямой.



$$\begin{rcases} a \parallel b \\ a \perp c \end{rcases} \Rightarrow b \perp c$$

Повторение темы: Перпендикулярные прямые

Какая прямая называется перпендикулярной к плоскости?

Повторение темы: Перпендикулярные прямые

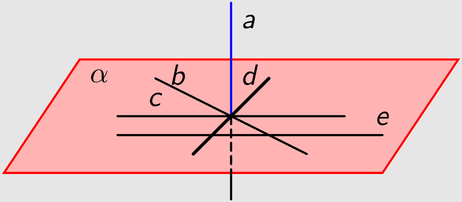
Какая прямая называется перпендикулярной к плоскости?

Прямая называется перпендикулярной к плоскости, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости (обозначение $a \perp \alpha$.)

Повторение темы: Перпендикулярные прямые

Какая прямая называется перпендикулярной к плоскости?

Прямая называется перпендикулярной к плоскости, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости (обозначение $a \perp \alpha$.)



$$a \perp \alpha \implies$$

$$a \perp b,$$
$$a \perp c,$$
$$a \perp d,$$
$$a \perp e, \ \ldots$$

Повторение темы: Перпендикулярные прямые

Какая связь между параллельностью прямых
и их перпендикулярностью к плоскости?

Повторение темы: Перпендикулярные прямые

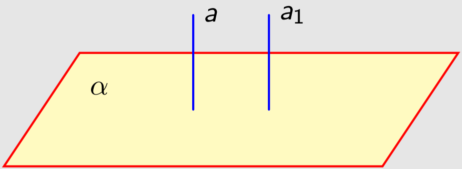
Какая связь между параллельностью прямых и их перпендикулярностью к плоскости?

Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и другая прямая перпендикулярна к этой плоскости.

Повторение темы: Перпендикулярные прямые

Какая связь между параллельностью прямых и их перпендикулярностью к плоскости?

Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и другая прямая перпендикулярна к этой плоскости.



$a \parallel a_1,\ a \perp \alpha \implies a_1 \perp \alpha$

Повторение темы: Перпендикулярные прямые

Как формулируется обратная теорема?

Повторение темы: Перпендикулярные прямые

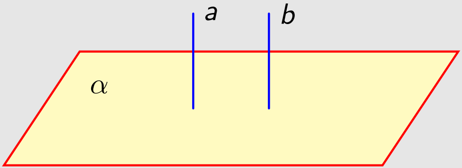
Как формулируется обратная теорема?

Если две прямые перпендикулярны к плоскости, то они параллельны.

Повторение темы: Перпендикулярные прямые

Как формулируется обратная теорема?

Если две прямые перпендикулярны к плоскости, то они параллельны.



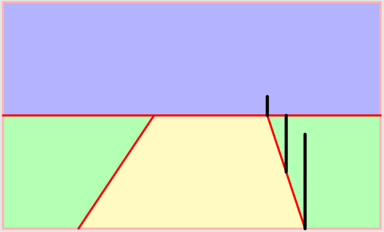
$a \perp \alpha, \ b \perp \alpha \implies a \parallel b.$

Повторение темы: Перпендикулярные прямые

Представьте телеграфные столбы вдоль дороги.
Можно ли утверждать, что они перпендикулярны дороге?

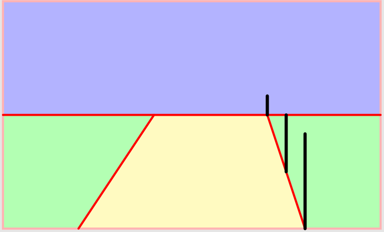
Повторение темы: Перпендикулярные прямые

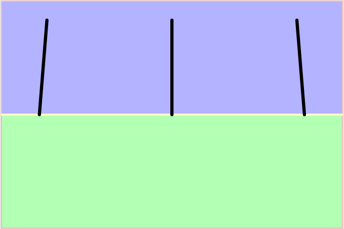
Представьте телеграфные столбы вдоль дороги.
Можно ли утверждать, что они перпендикулярны дороге?



Повторение темы: Перпендикулярные прямые

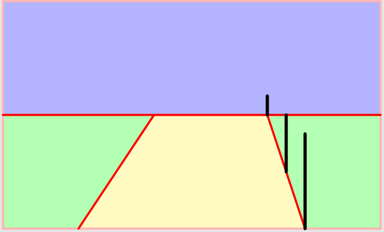
Представьте телеграфные столбы вдоль дороги.
Можно ли утверждать, что они перпендикулярны дороге?

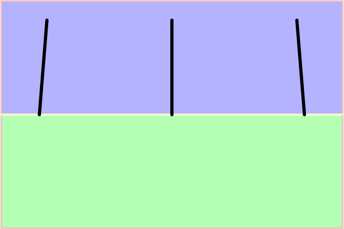




Повторение темы: Перпендикулярные прямые

Представьте телеграфные столбы вдоль дороги.
Можно ли утверждать, что они перпендикулярны дороге?





Нельзя! Как видно на втором рисунке (вид сбоку), левый и правый столбы даже не параллельны!

Решим задачу 119

Прямая OA перпендикулярна к плоскости OBC, и точка O является серединой отрезка AD. Докажите, что:

а) $AB = DB$;

б) $AB = AC$, если $OB = OC$;

в) $OB = OC$, если $AB = AC$.

Решим задачу 119

Прямая OA перпендикулярна к плоскости OBC, и точка O является серединой отрезка AD. Докажите, что:

а) $AB = DB$;

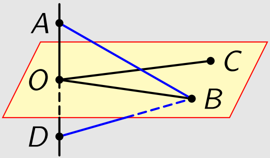
б) $AB = AC$, если $OB = OC$;

в) $OB = OC$, если $AB = AC$.

Решение, (случай а))

Решим задачу 119

Прямая OA перпендикулярна к плоскости OBC, и точка O является серединой отрезка AD. Докажите, что:



а) $AB = DB$;

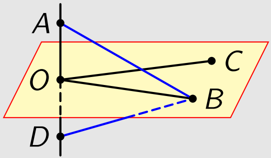
б) $AB = AC$, если $OB = OC$;

в) $OB = OC$, если $AB = AC$.

Решение, (случай а))

Решим задачу 119

Прямая OA перпендикулярна к плоскости OBC, и точка O является серединой отрезка AD. Докажите, что:



а) $AB = DB$;

б) $AB = AC$, если $OB = OC$;

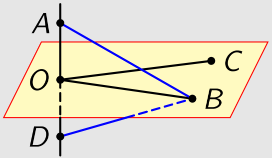
в) $OB = OC$, если $AB = AC$.

Решение, (случай а))

$OA \perp OBC$ по условию,

Решим задачу 119

Прямая OA перпендикулярна к плоскости OBC, и точка O является серединой отрезка AD. Докажите, что:



а) $AB = DB$;

б) $AB = AC$, если $OB = OC$;

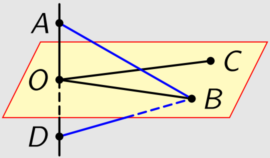
в) $OB = OC$, если $AB = AC$.

Решение, (случай а))

$OA \perp OBC$ по условию, тогда $OA \perp OB$ по определению перпендикулярности прямой к плоскости.

Решим задачу 119

Прямая OA перпендикулярна к плоскости OBC, и точка O является серединой отрезка AD. Докажите, что:



а) $AB = DB$;

б) $AB = AC$, если $OB = OC$;

в) $OB = OC$, если $AB = AC$.

Решение, (случай а))

$OA \perp OBC$ по условию, тогда $OA \perp OB$ по определению перпендикулярности прямой к плоскости.

$OA = OD$ по условию задачи, поэтому OB – серединный перпендикуляр к AD и поэтому $AB = DB$ $\square$.

Решим задачу 119

Прямая OA перпендикулярна к плоскости OBC, и точка O является серединой отрезка AD. Докажите, что:

а) $AB = DB$;

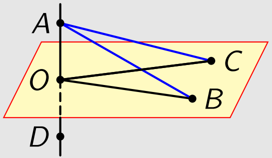
б) $AB = AC$, если $OB = OC$;

в) $OB = OC$, если $AB = AC$.

Решение, (случай б))

Решим задачу 119

Прямая OA перпендикулярна к плоскости OBC, и точка O является серединой отрезка AD. Докажите, что:



а) $AB = DB$;

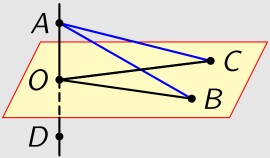
б) $AB = AC$, если $OB = OC$;

в) $OB = OC$, если $AB = AC$.

Решение, (случай б))

Решим задачу 119

Прямая OA перпендикулярна к плоскости OBC, и точка O является серединой отрезка AD. Докажите, что:



а) $AB = DB$;

б) $AB = AC$, если $OB = OC$;

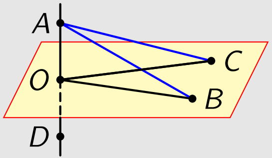
в) $OB = OC$, если $AB = AC$.

Решение, (случай б))

$OA \perp OBC$ по условию,

Решим задачу 119

Прямая OA перпендикулярна к плоскости OBC, и точка O является серединой отрезка AD. Докажите, что:



а) $AB = DB$;

б) $AB = AC$, если $OB = OC$;

в) $OB = OC$, если $AB = AC$.

Решение, (случай б))

$OA \perp OBC$ по условию, тогда $OA \perp OC$. Если $OB = OC$ то $\Delta\ AOC\ = \Delta\ AOB$ (по двум катетам) и $AB = AC$ $\square$.

Решим задачу 119

Прямая OA перпендикулярна к плоскости OBC, и точка O является серединой отрезка AD. Докажите, что:

а) $AB = DB$;

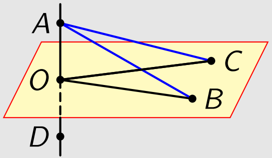
б) $AB = AC$, если $OB = OC$;

в) $OB = OC$, если $AB = AC$.

Решение, (случай в))

Решим задачу 119

Прямая OA перпендикулярна к плоскости OBC, и точка O является серединой отрезка AD. Докажите, что:



а) $AB = DB$;

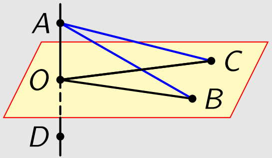
б) $AB = AC$, если $OB = OC$;

в) $OB = OC$, если $AB = AC$.

Решение, (случай в))

Решим задачу 119

Прямая OA перпендикулярна к плоскости OBC, и точка O является серединой отрезка AD. Докажите, что:



а) $AB = DB$;

б) $AB = AC$, если $OB = OC$;

в) $OB = OC$, если $AB = AC$.

Решение, (случай в))

Если $AB = AC$, то $\Delta\ AOC = \Delta\ AOB$ (по катету и гипотенузе) и $OB = OC$ $\square$.

Перпендикулярность прямой и плоскости

Как же проверить перпендикулярна данная прямая к данной плоскости или нет?

Ответ дает теорема, выражающая признак перпендикулярности прямой и плоскости.

Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

Перпендикулярность прямой и плоскости

Как же проверить перпендикулярна данная прямая к данной плоскости или нет?

Ответ дает теорема, выражающая признак перпендикулярности прямой и плоскости.

Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

Перпендикулярность прямой и плоскости

Как же проверить перпендикулярна данная прямая к данной плоскости или нет?

Ответ дает теорема, выражающая признак перпендикулярности прямой и плоскости.

Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости

Признак перпендикулярности прямой и плоскости

Признак перпендикулярности прямой и плоскости

Теорема.

Краткая запись условия:

Дано: a - прямая,

$a \perp p$,

$a \perp q$

$p \subset \alpha$,

$q \subset \alpha$.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости

Теорема.

Краткая запись условия:

Дано: a - прямая,

$a \perp p$,

$a \perp q$

$p \subset \alpha$,

$q \subset \alpha$.

Доказать, что $a \perp \alpha$.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости

Доказательство

Рассмотрим плоскость α,

Признак перпендикулярности прямой и плоскости

Доказательство

Рассмотрим плоскость α,

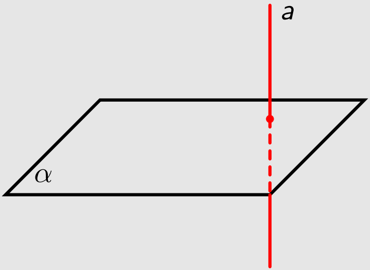
Признак перпендикулярности прямой и плоскости

Доказательство

Рассмотрим плоскость α,
и прямую a, $a \perp p$, $a \perp q$, где

Признак перпендикулярности прямой и плоскости

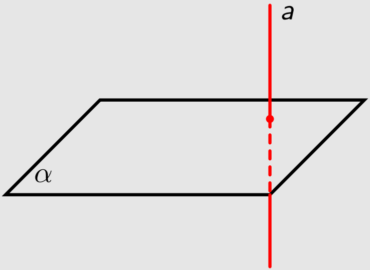
Доказательство



Рассмотрим плоскость α,
и прямую a, $a \perp p$, $a \perp q$, где

Признак перпендикулярности прямой и плоскости

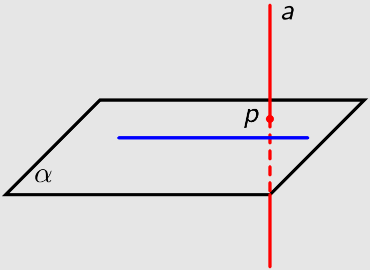
Доказательство



Рассмотрим плоскость α, и прямую a, $a \perp p$, $a \perp q$, где $p \subset \alpha$ и $q \subset \alpha$ — прямые, пересекающиеся в точке O.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости

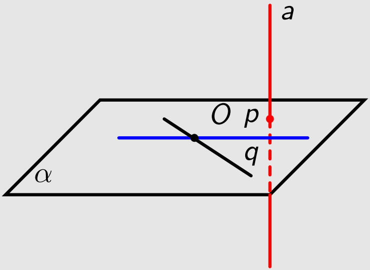
Доказательство



Рассмотрим плоскость α, и прямую a, $a \perp p$, $a \perp q$, где $p \subset \alpha$ и $q \subset \alpha$ — прямые, пересекающиеся в точке O.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости

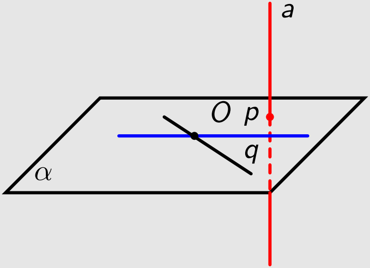
Доказательство



Рассмотрим плоскость α, и прямую a, $a \perp p$, $a \perp q$, где $p \subset \alpha$ и $q \subset \alpha$ — прямые, пересекающиеся в точке O.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости

Доказательство

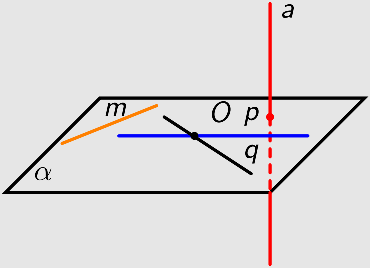


Рассмотрим плоскость α, и прямую a, $a \perp p$, $a \perp q$, где $p \subset \alpha$ и $q \subset \alpha$ — прямые, пересекающиеся в точке O.

Пусть m произвольная прямая плоскости α.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости

Доказательство

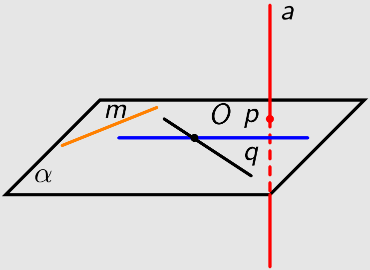


Рассмотрим плоскость α, и прямую a, $a \perp p$, $a \perp q$, где $p \subset \alpha$ и $q \subset \alpha$ — прямые, пересекающиеся в точке O.

Пусть m произвольная прямая плоскости α.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости

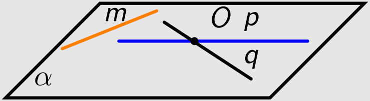
Доказательство



Рассмотрим плоскость α,
и прямую a, $a \perp p$, $a \perp q$, где $p \subset \alpha$ и $q \subset \alpha$ — прямые, пересекающиеся в точке O.

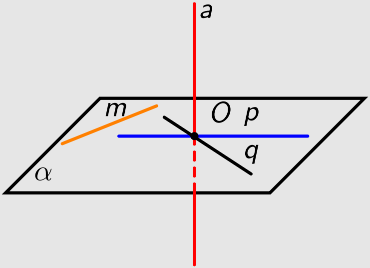
Пусть m произвольная прямая плоскости α.
Докажем, что прямая $a \perp m$.
Тогда $a \perp \alpha$ (по определению).

Признак перпендикулярности прямой и плоскости



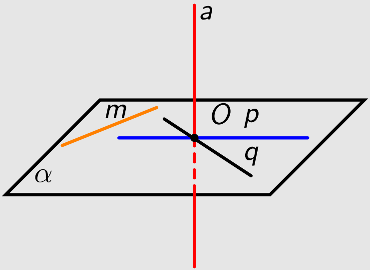
Рассмотрим сначала случай, когда прямая a проходит через точку O.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости



Рассмотрим сначала случай, когда прямая a проходит через точку O.

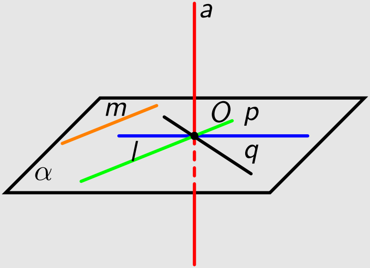
Признак перпендикулярности прямой и плоскости



Рассмотрим сначала случай, когда прямая a проходит через точку O.

Проведем через точку O прямую $l \parallel m$.

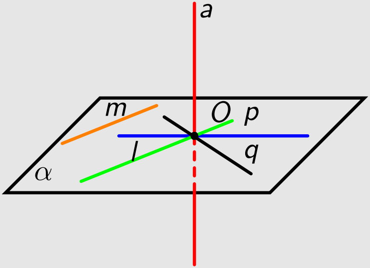
Признак перпендикулярности прямой и плоскости



Рассмотрим сначала случай, когда прямая a проходит через точку O.

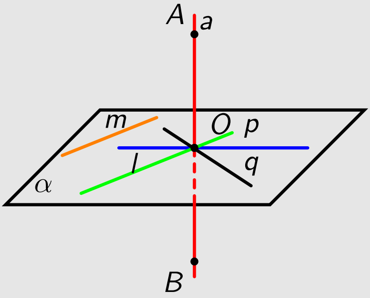
Проведем через точку O прямую $l \parallel m$.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости



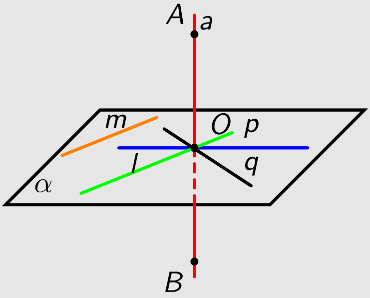
Рассмотрим сначала случай, когда прямая a проходит через точку O.
Проведем через точку O прямую $l \parallel m$.
Отметим на прямой a точки A и B так, чтобы $OA = OB$.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости



Рассмотрим сначала случай, когда прямая a проходит через точку O.
Проведем через точку O прямую $l \parallel m$.
Отметим на прямой a точки A и B так, чтобы $OA = OB$.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости



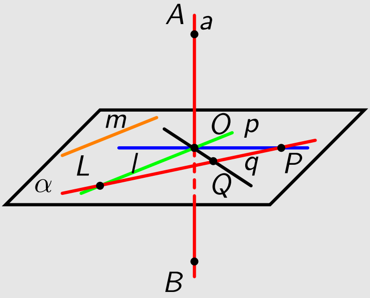
Рассмотрим сначала случай, когда прямая a проходит через точку O.

Проведем через точку O прямую $l \parallel m$.

Отметим на прямой a точки A и B так, чтобы $OA = OB$.

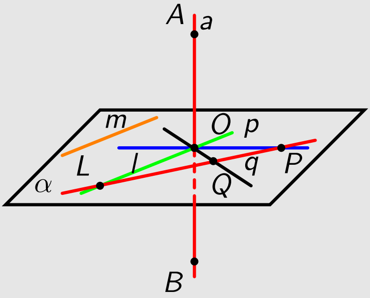
Проведем в плоскости α прямую, пересекающую прямые p, q и l в точках P, Q, L соответственно.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости



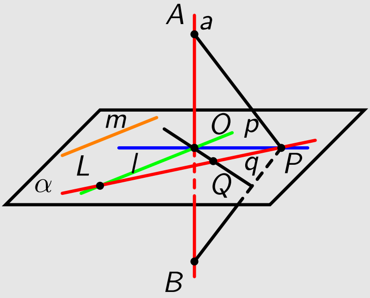
Рассмотрим сначала случай, когда прямая a проходит через точку O.
Проведем через точку O прямую $l \parallel m$.
Отметим на прямой a точки A и B так, чтобы $OA = OB$.
Проведем в плоскости α прямую, пересекающую прямые p, q и l в точках P, Q, L соответственно.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости



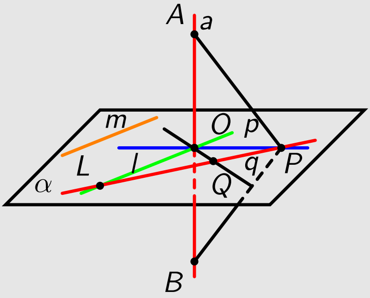
p и q — срединные перпендикуляры к AB. Поэтому $AP = BP$,

Признак перпендикулярности прямой и плоскости



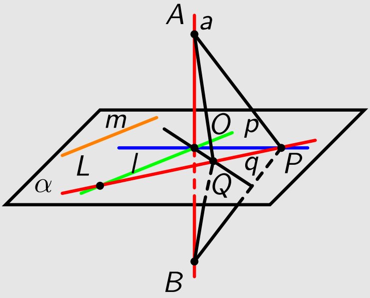
p и q — срединные перпендикуляры к AB. Поэтому $AP = BP$,

Признак перпендикулярности прямой и плоскости



p и q — срединные перпендикуляры к AB.
Поэтому $AP = BP, AQ = BQ$,

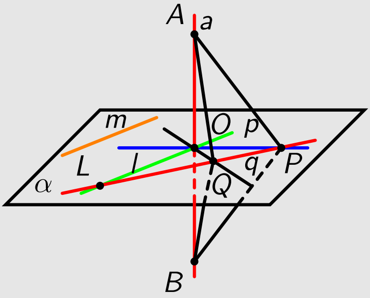
Признак перпендикулярности прямой и плоскости



p и q — срединные перпендикуляры к AB.

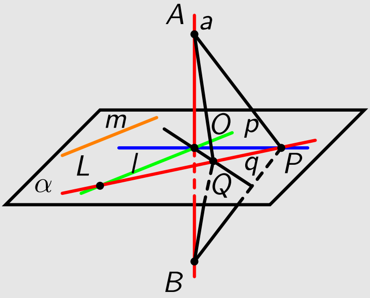
Поэтому $AP = BP, AQ = BQ$,

Признак перпендикулярности прямой и плоскости



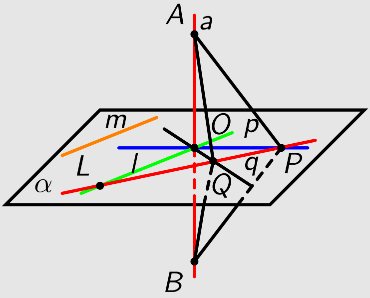
p и q — срединные перпендикуляры к AB.
Поэтому $AP = BP, AQ = BQ$,
$\Delta APQ = \Delta BPQ$
по трем сторонам.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости



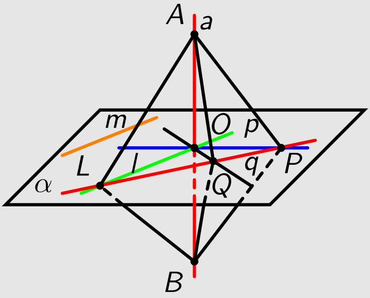
p и q — срединные перпендикуляры к AB.
Поэтому $AP = BP, AQ = BQ$,
$\Delta APQ = \Delta BPQ$
по трем сторонам.
Тогда $\angle APQ = \angle BPQ$.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости



p и q — срединные перпендикуляры к AB.
Поэтому $AP = BP, AQ = BQ$,
$\Delta APQ = \Delta BPQ$
по трем сторонам.
Тогда $\angle APQ = \angle BPQ$.
Проведем отрезки AL и BL.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости



p и q — срединные перпендикуляры к AB.

Поэтому $AP = BP, AQ = BQ$,

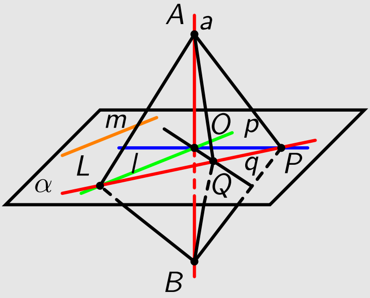
$\Delta APQ = \Delta BPQ$

по трем сторонам.

Тогда $\angle APQ = \angle BPQ$.

Проведем отрезки AL и BL.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости



p и q — срединные перпендикуляры к AB.

Поэтому $AP = BP, AQ = BQ$,

$\Delta APQ = \Delta BPQ$

по трем сторонам.

Тогда $\angle APQ = \angle BPQ$.

Проведем отрезки AL и BL.

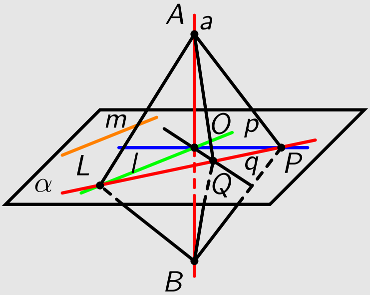
$\Delta APL = \Delta BPL$

по двум сторонам

и углу между ними.

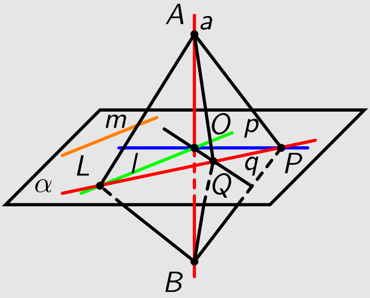
Поэтому $AL = BL$.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости



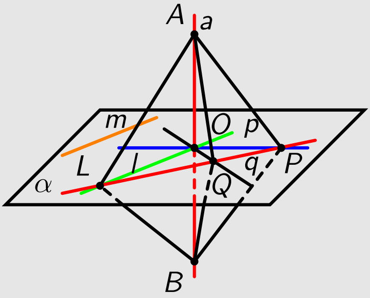
Тогда ΔABL равнобедренный.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости



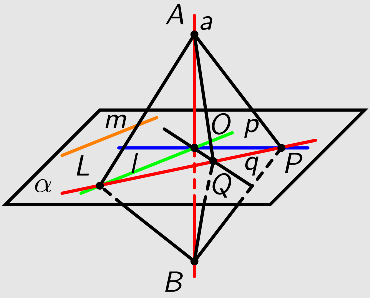
Тогда ΔABL равнобедренный. Его медиана LO является его высотой, то есть $l \perp a$.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости



Тогда ΔABL равнобедренный. Его медиана LO является его высотой, то есть $l \perp a$. Так как $l \| m$ и $l \perp a$, то по лемме о перпендикулярности двух параллельных прямых третьей $m \perp a$.

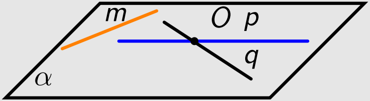
Признак перпендикулярности прямой и плоскости



Тогда ΔABL равнобедренный. Его медиана LO является его высотой, то есть $l \perp a$. Так как $l \| m$ и $l \perp a$, то по лемме о перпендикулярности двух параллельных прямых третьей $m \perp a$.

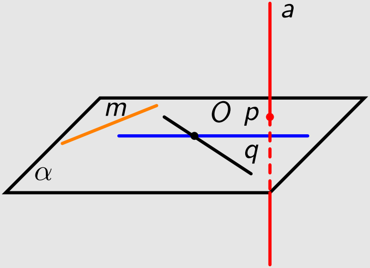
Таким образом, прямая a перпендикулярна к любой прямой m плоскости α, то есть $m \perp \alpha$.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости



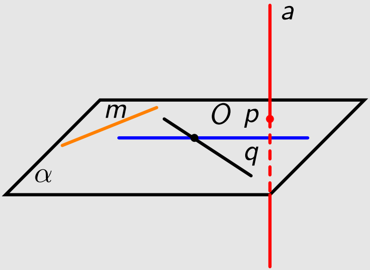
Пусть теперь прямая a не проходит через точку O.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости



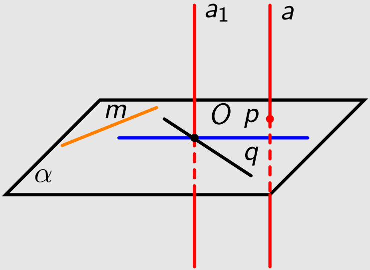
Пусть теперь прямая a не проходит через точку O.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости



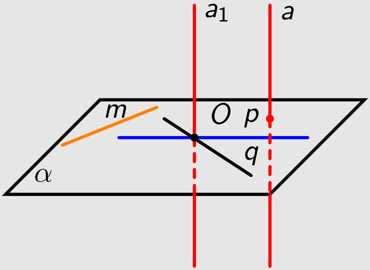
Пусть теперь прямая a не проходит через точку O. Проведем через точку O прямую $a_1 \parallel a$.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости



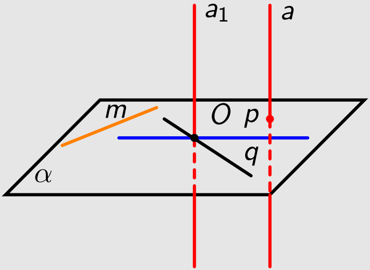
Пусть теперь прямая a не проходит через точку O. Проведем через точку O прямую $a_1 \parallel a$.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости



Пусть теперь прямая a не проходит через точку O. Проведем через точку O прямую $a_1 \parallel a$. По лемме $a_1 \perp p$ и $a_1 \perp q$, поэтому по доказанному в первом случае $a_1 \perp \alpha$.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости



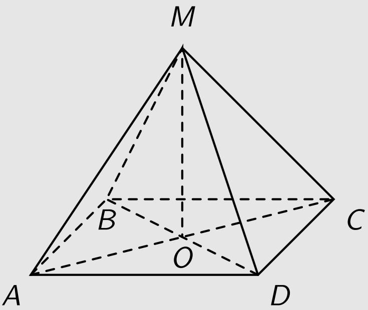
Пусть теперь прямая a не проходит через точку O. Проведем через точку O прямую $a_1 \parallel a$. По лемме $a_1 \perp p$ и $a_1 \perp q$, поэтому по доказанному в первом случае $a_1 \perp \alpha$. Тогда по теореме о двух параллельных прямых, одна из которых перпендикулярна к плоскости, следует, $a \perp \alpha$, $\square$.

Пример применения признака перпендикулярности

Задача 128. Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведена прямая OM так,что $MA = MC$, $MB = MD$. Докажите, что прямая OM перпендикулярна к плоскости параллелограмма.

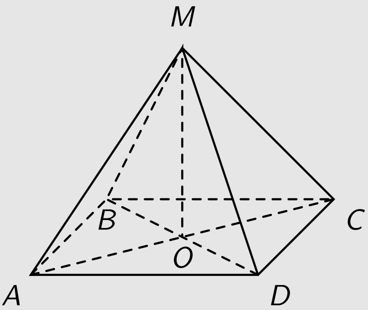
Пример применения признака перпендикулярности

Задача 128. Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведена прямая OM так,что $MA = MC$, $MB = MD$. Докажите, что прямая OM перпендикулярна к плоскости параллелограмма.



Пример применения признака перпендикулярности

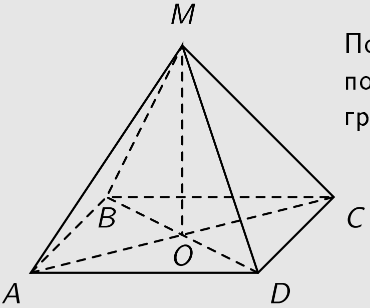
Задача 128. Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведена прямая OM так,что $MA = MC$, $MB = MD$. Докажите, что прямая OM перпендикулярна к плоскости параллелограмма.



Решение

Пример применения признака перпендикулярности

Задача 128. Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведена прямая OM так,что $MA = MC$, $MB = MD$. Докажите, что прямая OM перпендикулярна к плоскости параллелограмма.

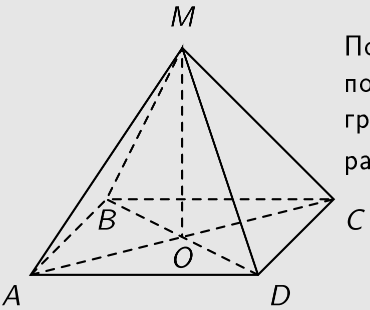


Решение

По условию $MA = MC$ и $AO = OC$ по свойству диагоналей параллелограмма.

Пример применения признака перпендикулярности

Задача 128. Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведена прямая OM так,что $MA = MC$, $MB = MD$. Докажите, что прямая OM перпендикулярна к плоскости параллелограмма.

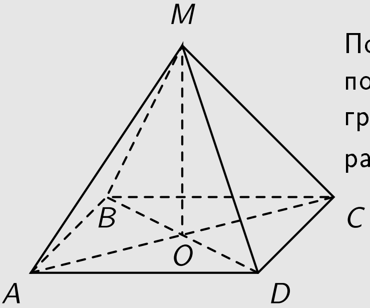


Решение

По условию $MA = MC$ и $AO = OC$ по свойству диагоналей параллелограмма. Поэтому MO — медиана равнобедренного треугольника AMC.

Пример применения признака перпендикулярности

Задача 128. Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведена прямая OM так,что $MA = MC$, $MB = MD$. Докажите, что прямая OM перпендикулярна к плоскости параллелограмма.



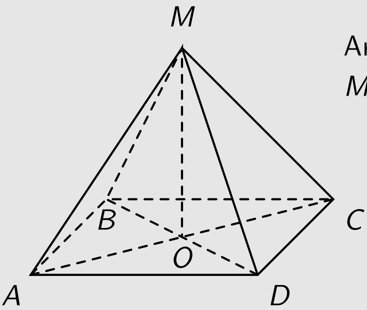
Решение

По условию $MA = MC$ и $AO = OC$ по свойству диагоналей параллелограмма. Поэтому MO — медиана равнобедренного треугольника AMC.

Следовательно, MO также высота этого треугольника, то есть $MO \perp AC$.

Пример применения признака перпендикулярности

Задача 128. Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведена прямая OM так,что $MA = MC$, $MB = MD$. Докажите, что прямая OM перпендикулярна к плоскости параллелограмма.

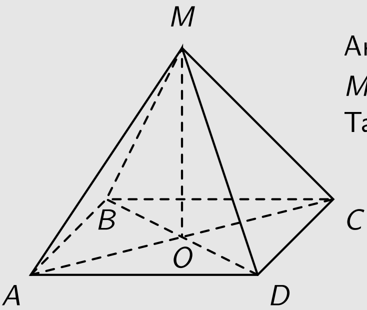


Решение

Аналогично доказывается, что $MO \perp BD$.

Пример применения признака перпендикулярности

Задача 128. Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведена прямая OM так,что $MA = MC$, $MB = MD$. Докажите, что прямая OM перпендикулярна к плоскости параллелограмма.



Решение

Аналогично доказывается, что $MO \perp BD$.

Так как $MO \perp AC$ и $MO \perp BD$, то $MO \perp ABCD$ по признаку перпендикулярности прямой и плоскости. $\square$

Домашнее задание

Глава II, §1, п. 17. № 121, 124, 126.

Литература, использованная при создании презентации:

1. Till Tantau. User Guide to the Beamer Class, Version 3.07. http://latex-beamer.sourceforge.net, September 29, 2011.
2. Till Tantau. The Tikz and PGF Packages, Manual for Version 2.10, http://sourceforge.net/projects/pgf, October, 2010.