**Логарифмические неравенства**

**Задача 1. Решить неравенство:**

log*x*2(*x* + 2) *<* 1*.*

*Решение.* Перейдём в неравенстве к какому-нибудь постоянному основанию. Например, к основанию 10:

lg(*x* + 2)

*<* 1*.*

lg*x*2

Чтобы применить метод рационализации, нам в правой части необходим нуль. Переносим единицу влево:

lg(*x* + 2)

− 1 *<* 0*,*

lg*x*2

или

lg(*x* + 2) − lg*x*2

*<* 0*.*

lg*x*2

В числителе получилась разность логарифмов — это как раз то, что нам нужно. Не хватает разности логарифмов в знаменателе. Но такую разность мы легко организуем:

lg*x*2 = lg*x*2 − 0 = lg*x*2 − lg1*.*

Таким образом, наше неравенство принимает вид:

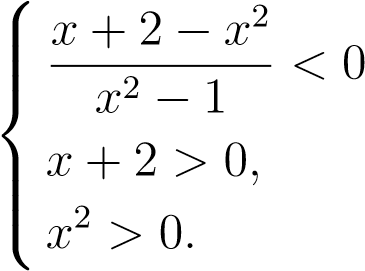
lg(*x* + 2) − lg*x*2

*<* 0*.*

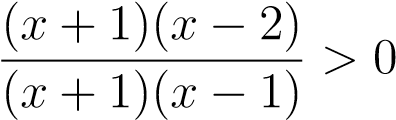
lg*x*2 − lg1

До сих пор мы совершали равносильные преобразования, так что неравенство равносильно исходному неравенству.

Теперь мы замечаем, что в силу монотонного возрастания функции *y* = lg*x* числитель совпадает по знаку с разностью (*x* + 2) − *x*2, а знаменатель совпадает по знаку с разностью *x*2 − 1. Поэтому неравенство равносильно системе:

*,*

Преобразуем первое неравенство системы :

*,*

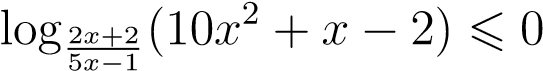
и решаем его методом интервалов:

*x <* −1*,* −1 *< x <* 1*, x >* 2*.*

Решения второго и третьего неравенств системы — это множество − 2 *< x <* 0*, x >* 0*.*

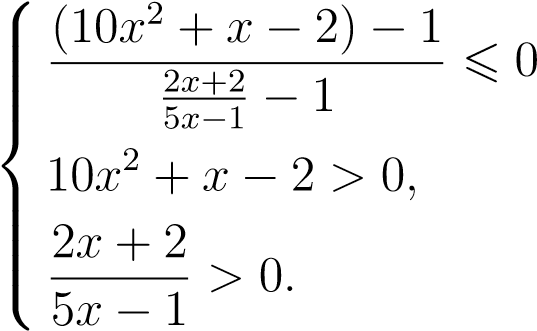
Остаётся пересечь множества

*Ответ:* (−2;−1) ∪ (−1;0) ∪ (0;1) ∪ (2;+∞).

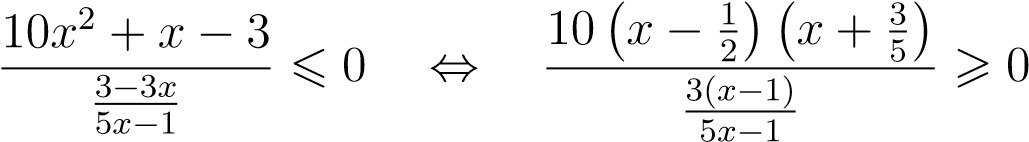
**Задача 2. Решить неравенство:** *.*

lg 

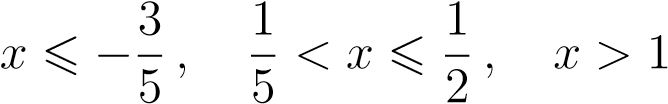
Ввиду монотонного возрастания функции *y* = lg*x* неравенство равносильно системе:

*,*

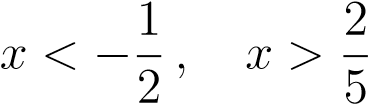
Преобразуем первое неравенство системы :

*,*

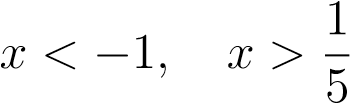
и решаем его методом интервалов:

*.*

Решения второго неравенства системы :

 *.*

Решения третьего неравенства системы

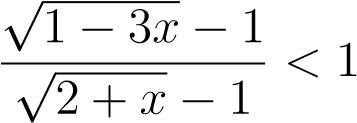
 *.*

Остаётся пересечь множества

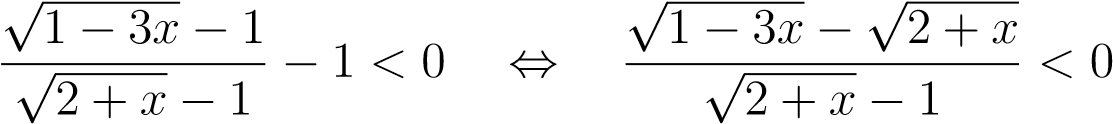
*Ответ:* .

**Неравенства иррациональные**

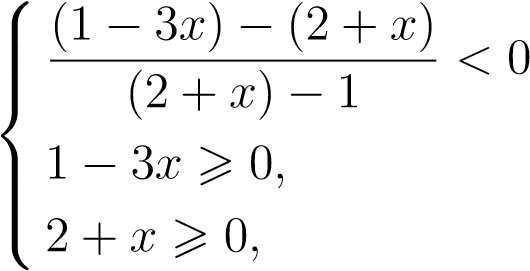
**Задача 3. Решить неравенство:**

*.*

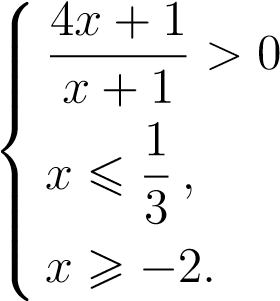
*Решение.* Для начала выполним равносильные преобразования:

*.*

Вследствие монотонного возрастания функции *y* = полученное неравенство равносильно системе:

*,*

или

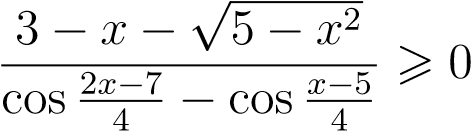
*,*

Эта система решается легко.

*Ответ:* .

**Неравенства с тригонометрическими функциями**

**Задача 4. Решить неравенство:**

*.*

*Решение.* Заметим, что функция *y* = cos*x* монотонно возрастает на отрезке [−*π*;0] (рис. 1). Этот факт пригодится нам при решении задачи.

*X*

*Y*

−

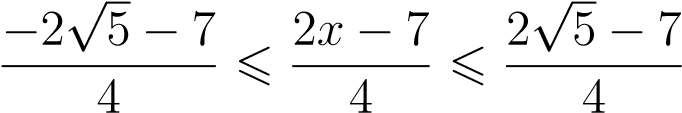
*π*

0

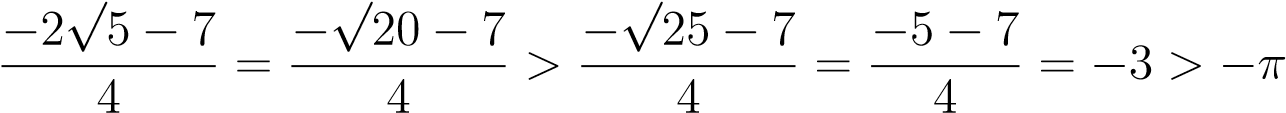
Рис. 1. График функции *y* = cos*x*

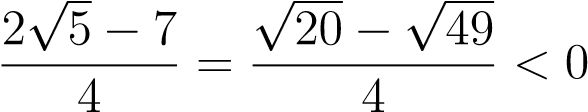
Решения уравнения удовлетворяют условию 5 − *x*2 > 0

Для аргумента первого косинуса в знаменателе имеем тогда следующую оценку:

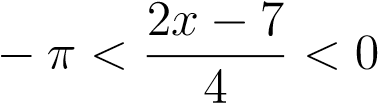
 *.*

Замечаем, что:

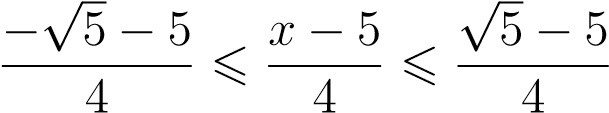
;

*.*

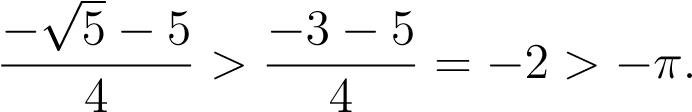
Таким образом, из неравенства следует неравенство

*.*

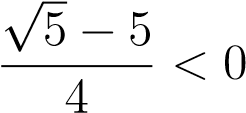
Получим аналогичную оценку для аргумента второго косинуса.

 *.*

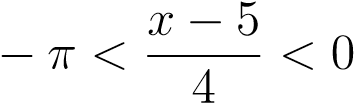
С одной стороны,



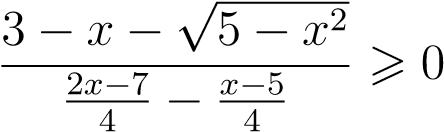
С другой стороны,

*.*

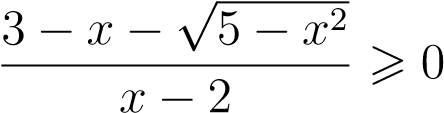
Следовательно,

*.*

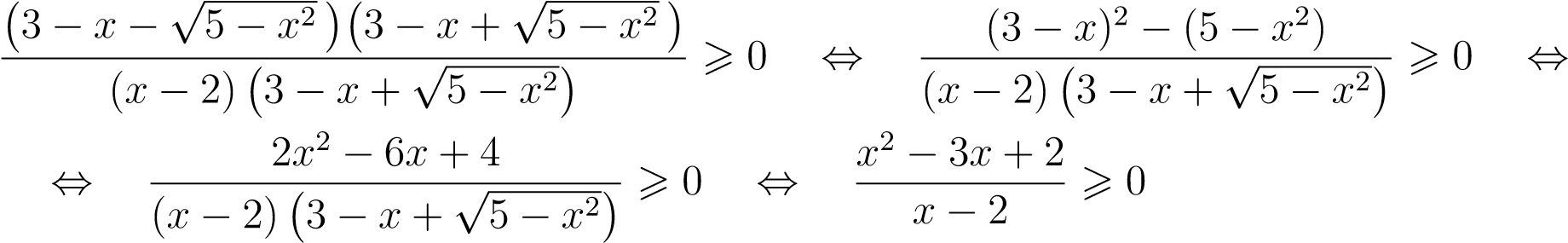
Ввиду оценок и монотонного возрастания косинуса на отрезке [−*π*;0] исходное неравенство равносильно неравенству

*,*

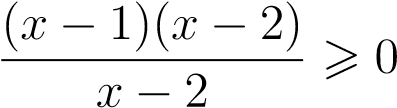
то есть

*.*

домножим на сопряжённое, то есть умножим числитель и знаменатель на 3−*x*+ 5 − *x*2. Получим цепочку равносильных преобразований:



Последнее неравенство приводится к виду

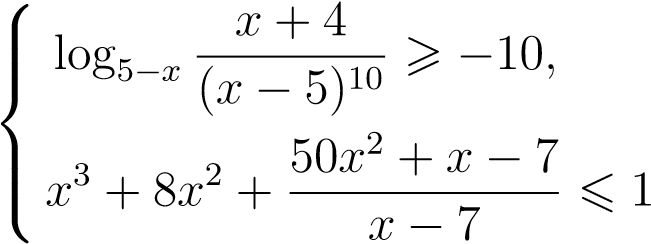


и легко решается методом интервалов.

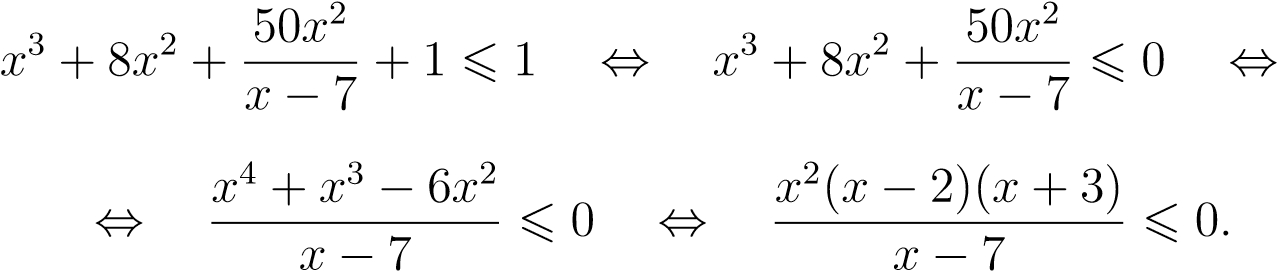
*Ответ:* .

**Решение систем неравенств**

**Задача 5. Решите систему неравенств:**

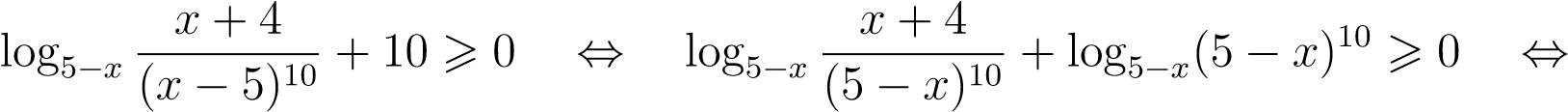
*.*

*Решение.* Начнём со второго неравенства (вдруг его решения окажутся, например, *x >* 10, — тогда ясно, что система не имеет решений, и можно не решать первое неравенство). Преобразуем второе неравенство:

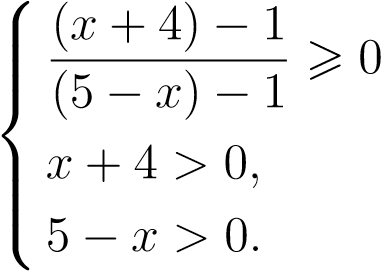


Полученное неравенство легко решается методом интервалов.

Теперь займёмся первым неравенством:



Функция *y* = lg*x* монотонно возрастает; следовательно, последнее неравенство равносильно системе:

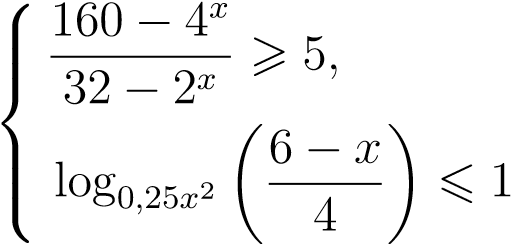
*,*

Данная система легко решается с помощью метода интервалов.

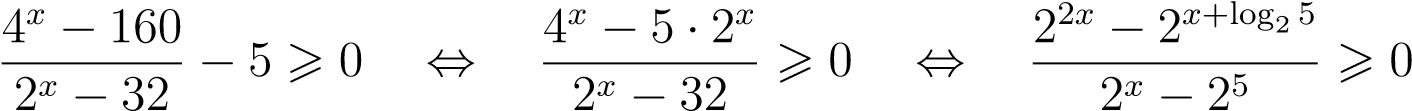
Для получения ответа нужно пересечь множества решений каждого из неравенств

*Ответ:* {−3} ∪ {0} ∪ [2;4).

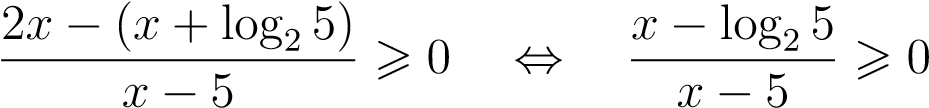
**Задача 6. Решите систему неравенств:**

*.*

*Решение.* Преобразуем первое неравенство:

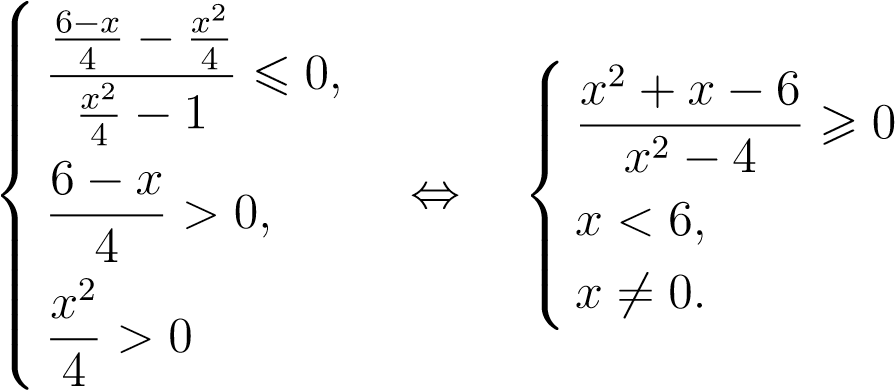
*.*

Функция *y* = 2*x* определена и монотонно возрастает на множестве R. Поэтому последнее неравенство равносильно неравенству

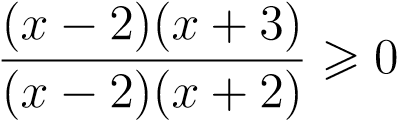
*.*

Решаем его методом интервалов. (очевидно, что log2 5 *<* 5).

Функция *y* = lg*x* определена и монотонно возрастает на множестве (0;+∞), поэтому неравенство равносильно системе:

*,*

Первое неравенство системы записывается в виде:

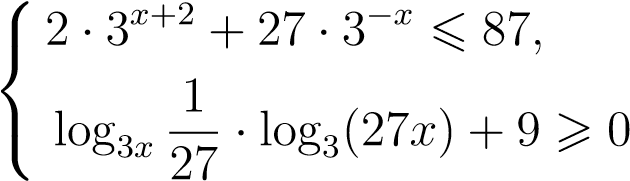


и решается методом интервалов.

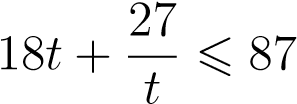
Для получения ответа нужно пересечь множества решений обоих неравенств исходной системы, то есть множества и учесть оценку 2 *<* log2 5.

*Ответ:* (−∞;−3] ∪ (−2;0) ∪ (0;2) ∪ (2;log2 5] ∪ (5;6).

**Задача 7. Решите систему неравенств:**

*.*

*Решение.* В первом неравенстве делаем замену *t* = 3*x*:

*.*

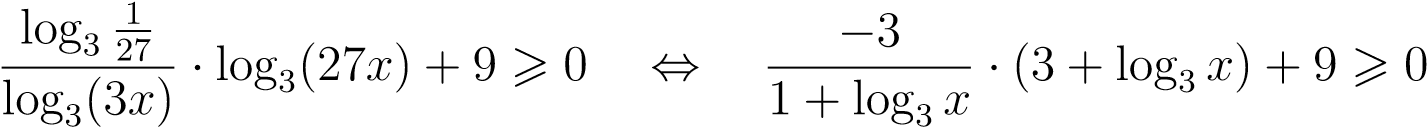
Заметим, что *t >* 0 при всех *x*. Поэтому, умножая данное неравенство на *t* (а заодно и деля его на 3), получим равносильное неравенство:

6*t*2 − 29*t* + 9 6 0*.*

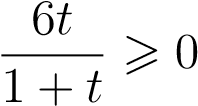
Решения данного неравенства: . Обратная замена: . Решая это двойное неравенство, получаем решения первого неравенства исходной системы:

-1<x<log3(9/2).

Во втором неравенстве нашей системы переходим к основанию 3:

*.*

Сделав замену *t* = log3 *x* и выполнив простые преобразования, получим неравенство

*.*

Его решения: *t <* −1 или *t* > 0. Обратная замена: log3 *x <* −1 или log3 *x* > 0. Отсюда получаем решения второго неравенства исходной системы:

0

*<*

*<*

*x*

1

3

*,*

*x*

>

1

*.*

Решение нашей системы получается пересечением решений первого и второго неравенств (при этом ясно, что 

*Ответ:* .